UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

61. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. DEZEMBER 1954)

QA1
M88
v.61
no.3

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole *o* und *O*, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

61. Band — **Inhalt** — 3. Heft

Seite

Laugwitz, D., Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume 235
Schubert, H., Über eine numerische Knoteninvariante 245
Meinardus, G., Über Partitionen mit Differenzenbedingungen 289
Puppe, D., Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders 303
Verblunsky, S., On the roots of a transcendental equation, occurring in the theory of trigonometric series 324
Nitsche, J., Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems 336
Petresco, J., Sur les commutateurs 348

not acc.

LAUGWITZ, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 235—244 (1954)

QA1
M88
v.61
no.3

Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume.

Von
DETLEF LAUGWITZ.

In einem reellen Vektorraum beliebiger (auch unendlicher) Dimension ist mit einem zum Nullpunkt symmetrischen konvexen Körper K eine MINKOWSKIsche Metrik oder Norm $||\ ||$ gegeben. Diese ist ein reellwertiges Funktional, welches für alle Vektoren $x, y, \ldots$ des Raumes definiert ist und folgende Eigenschaften hat:

$||x|| > 0$ für $x \neq 0$, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, $||a \cdot x|| = |a| \cdot ||x||$ für reelles a.

K ist mit der Menge $||x|| \leq 1$ identisch; die Punktmenge $||x|| = 1$, den Rand von K, nennen wir die Indikatrix oder Eichfläche des MINKOWSKIschen oder normierten Raumes[1]).

Hier sollen einige Beziehungen zwischen der Längenmessung in normierten Räumen und der Geometrie der konvexen Mittelpunktsbereiche untersucht werden. Im ersten Abschnitt werden wir den zweidimensionalen Fall behandeln. Es wird das Analogon der Zahl π, das Verhältnis von MINKOWSKIschem Umfang und Durchmesser der Indikatrix, abgeschätzt werden. Eine mit dem MINKOWSKIschen Krümmungsverhalten der Indikatrix zusammenhängende Kennzeichnung der Ellipsen sowie einer von RADON untersuchten Kurvenklasse wird angegeben werden. In Abschnitt 2 soll ein Beitrag zur Verallgemeinerung der FENCHELschen Abschätzung der Gesamtkrümmung geschlossener Raumkurven gegeben werden. Im dritten Abschnitt folgen Kennzeichnungen der Ellipsoide und der euklidischen Räume beliebiger Dimension. Dabei werden wir eine allgemeinere als die MINKOWSKIsche Metrik zugrunde legen, in der an die Stelle von K ein „Sternbereich" S tritt, d.h. eine Punktmenge, die den Nullpunkt enthält und mit jeder Geraden durch den Nullpunkt ein abgeschlossenes, den Nullpunkt im Innern enthaltendes Intervall als Durchschnitt hat. Dazu gehört eine Metrik $F(x)$ mit $F(x) > 0$ für $x \neq 0$ und $F(a \cdot x) = a \cdot F(x)$ für $a > 0$.

Diese Maßbestimmungen sind von Interesse für die Differentialgeometrie. Da die Meßvorschrift in diesen Räumen offenbar affininvariant ist, sind dies nämlich in gewissem Sinne die allgemeinsten metrischen Räume, die als Tangentialräume einer metrischen differenzierbaren Mannigfaltigkeit auftreten können.

1. Die Indikatrix in der MINKOWSKIschen Ebene.

In einer MINKOWSKIschen Ebene kann man jedem konvexen Kurvenbogen eine Länge zuschreiben, die auch ∞ sein darf. Ein solcher Bogen ist ja nur

[1]) Vgl. dazu [3, Abschn. 14] und [9, Satz 1] des Literaturverzeichnisses.

an höchstens abzählbar vielen Stellen nicht differenzierbar, und man kann daher seine Länge durch das LEBESGUEsche Integral über $||d\mathfrak{x}||$ definieren[2]). (In endlichdimensionalen Vektorräumen bezeichnen wir Vektoren durch deutsche Buchstaben.) Insbesondere kann man daher nach dem Umfang der Indikatrix $\mathfrak{E}$ selbst fragen und das Analogon der Zahl π in der euklidischen Geometrie berechnen:

$$\Pi_{\mathfrak{E}} = \Pi = \tfrac{1}{2} \mathfrak{E} \oint ||d\mathfrak{x}||.$$

Wir wollen hier Schranken für Π angeben und werden $\mathfrak{E}$ dabei keinen Einschränkungen unterwerfen.

Zunächst nehmen wir für $\mathfrak{E}$ gewisse Sechsecke. In der Ebene denken wir uns ein lineares Koordinatensystem eingeführt. $\mathfrak{E}$ soll dann das Sechseck mit den folgenden Ecken sein:

$$\pm(1,1), \quad \pm(1,0), \quad \pm(\eta,-1) \quad \text{mit einem festen } \eta \quad (0 \leq \eta \leq 1).$$

Dann gilt $\Pi = 3 + \eta$.

Es treten also für Π alle Werte zwischen 3 und 4 einschließlich der Grenzen auf. Übrigens erkennt man für $\eta = \pi - 3$, daß $\Pi = \pi$ nicht kennzeichnend ist für die euklidische Geometrie, in der $\mathfrak{E}$ eine Ellipse ist.

Wir werden nun beweisen, daß 3 und 4 die wirklichen Grenzen für Π sind, so daß wir haben:

Satz 1.1. *Für das Verhältnis Π von Umfang zu Durchmesser der Indikatrix einer* MINKOWSKI*schen Ebene gilt*

$$3 \leq \Pi \leq 4;$$

alle von dieser Ungleichung zugelassenen Werte treten in geeigneten MINKOWSKI*schen Ebenen wirklich auf.*

Wir wollen zunächst die Abschätzung nach unten beweisen. Dazu benötigen wir eine elementargeometrische Eigenschaft konvexer Kurven mit Mittelpunkt. Wir gehen von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ mit $||\mathfrak{a}|| = 1$ aus und lassen einen zweiten, variablen Vektor $\mathfrak{v}$ mit $||\mathfrak{v}|| = 1$ etwa im positiven Sinne von $\mathfrak{a}$ bis $-\mathfrak{a}$ laufen. Dabei betrachten wir die Funktion $||\mathfrak{v} - \mathfrak{a}||$, welche stetig von $\mathfrak{v}$ abhängt, da $||\mathfrak{y}||$ eine stetige Funktion von $\mathfrak{y}$ ist. Diese Funktion $||\mathfrak{v} - \mathfrak{a}||$ hat für $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}$ den Wert 0, für $\mathfrak{v} = -\mathfrak{a}$ den Wert 2. Für einen Vektor $\mathfrak{b}$ mit $||\mathfrak{b}|| = 1$ gilt also, daß auch $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ auf der Indikatrix liegt. Die sechs Vektoren $\pm\mathfrak{a}$, $\pm\mathfrak{b}$, $\pm\mathfrak{c}$ spannen mithin ein der Indikatrix einbeschriebenes, affin-reguläres Sechseck auf, dessen Seiten je die MINKOWSKIsche Länge 1 haben. Da in einer MINKOWSKIschen Geometrie wegen des Bestehens der Dreiecksungleichung keine Verbindungslinie zweier Punkte kürzer ist als die geradlinige, haben die zugehörigen Bögen der Indikatrix jeweils mindestens die Länge 1, und daraus folgt $2\Pi \geq 6$.

Die verwendete Eigenschaft konvexer Kurven mit Mittelpunkt besagt, daß man bei diesen Kurven wie beim Kreis 3 Paare von Diametralpunkten

[2]) Der Kurvenbogen wird dabei stückweise auf eine Koordinate eines affinen Koordinatensystems bezogen; das Ergebnis ist unabhängig von der speziellen Wahl des Koordinatensystems.

auf dem Rande finden kann, so daß die aus der ursprünglichen durch Parallelverschiebung hervorgegangenen Kurven, welche diese Punkte als Mittelpunkte haben, die ursprüngliche Kurve jeweils in den benachbarten Punkten der anderen Paare treffen[3]). — Diese Eigenschaft hätte man übrigens auch leicht durch Parallelverschiebung der konvexen Kurve beweisen können, man hätte dann aber Ausnahmefälle, z. B. bei Vierecken, diskutieren müssen.

Zum Beweise der Abschätzung nach oben setzen wir zunächst voraus, daß $\mathfrak{E}$ ein Paar konjugierter Durchmesser besitzt. Zwei Durchmesser von $\mathfrak{E}$ werden konjugiert genannt, wenn jeder von ihnen in seinen Endpunkten zum anderen parallele Stützgeraden von $\mathfrak{E}$ hat[4]).

Es seien nun $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ zwei Radiusvektoren in Richtungen konjugierter Durchmesser; jeder Vektor $\mathfrak{x}$ ist dann darstellbar in der Form $\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2$. Dann gilt

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\oint \|d\mathfrak{x}\| = \tfrac{1}{2}\oint \|\mathfrak{e}_1\, dx_1 + \mathfrak{e}_2\, dx_2\| \leq \int_{-1}^{+1} \|\mathfrak{e}_1\|\, dx_1 + \int_{-1}^{+1} \|\mathfrak{e}_2\|\, dx_2 = 4,$$

und damit ist die Abschätzung nach oben bewiesen.

Wenn man ganz im Rahmen der Minkowskischen Geometrie bleiben will, kann man diesen Beweis unter Beachtung der Tatsache führen, daß die in den Endpunkten der konjugierten Durchmesser der Indikatrix ein- bzw. umbeschriebenen Parallelogramme P_i bzw. P_a selbst wieder Minkowskische Metriken definieren. (P_a wird von den betrachteten, zu den Durchmessern parallelen Stützgeraden gebildet.) Dann gilt:

Umfang von $\mathfrak{E}$, gemessen bezüglich $\mathfrak{E}$

$$\leq \text{Umfang von } \mathfrak{E}, \text{ gemessen bezüglich } P_i$$
$$= \text{Umfang von } P_a, \text{ gemessen bezüglich } P_i$$
$$= 8,$$

und dies ist die Behauptung.

Wir müssen nun noch die Existenz konjugierter Durchmesser für beliebige konvexe Kurven $\mathfrak{E}$ mit Mittelpunkt beweisen. Dazu bedienen wir uns einer von J. Radon [*10*] angegebenen analytischen Darstellung für die Stützelemente konvexer, geschlossener Kurven, die wir für unsere Zwecke modifizieren. Wir führen Polarkoordinaten r, φ um den Mittelpunkt von $\mathfrak{E}$ ein und bezeichnen mit ϑ den Winkel, durch den man den Radiusvektor im positiven Sinne drehen muß, damit er der betrachteten Stützgeraden in (r, φ) parallel wird. Dann ist $u = 2\varphi + \vartheta$ ein Parameter, der die Stützelemente von $\mathfrak{E}$ modulo 4π eindeutig beschreibt. Offenbar gilt

(1) $$\vartheta(u + 4\pi) = \vartheta(u), \quad 0 < \vartheta(u) < \pi, \quad \vartheta(u) \text{ stetig.}$$

[3]) Eins der Paare kann dabei willkürlich vorgegeben werden.

[4]) Konjugierte Durchmesser bei konvexen Kurven wurden — ohne Erwähnung dieses Namens — erstmals von J. Radon [*10*] behandelt. P. Funk beweist im Zusammenhang mit einer affingeometrischen Schließungsaufgabe in [*5*] die Existenz eines Paares konjugierter Durchmesser für zweimal differenzierbare Mittelpunktseilinien; er beweist nicht, wie in [*6*] irrtümlich angegeben, die Existenz zweier solcher Paare.

Aus der Geschlossenheit der Kurve schließt RADON:

$$\int_0^{4\pi} \operatorname{cotg} \vartheta(u)\, du = 0. \tag{2}$$

Für Kurven $\mathfrak{C}$ mit Mittelpunkt entnehmen wir daraus sofort

$$\vartheta(u + 2\pi) = \vartheta(u), \quad 0 < \vartheta(u) < \pi, \ \vartheta(u) \text{ stetig}, \tag{1'}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \vartheta(u)\, du = 0. \tag{2'}$$

Gehört u^* zum Stützelement eines Durchmessers, der zu einem Paar konjugierter Durchmesser gehört, so ist $u^* + \pi$ der Parameterwert des konjugierten Stützelementes, und es gilt

$$\vartheta(u^* + \pi) + \vartheta(u^*) = \pi;$$

diese Beziehung ist charakteristisch für konjugierte Durchmesser. — Wir betrachten nun die Funktion $\tau(u) = \operatorname{cotg} \vartheta(u) + \operatorname{cotg} \vartheta(u + \pi)$, welche wegen (1') stetig ist und die Periode π hat; daraus und aus (2') ergibt sich

$$\int_0^{\pi} \tau(u)\, du = 0.$$

Also gibt es mindestens zwei Werte u_1^*, u_2^* mit $0 \leqq u_j^* < \pi$ und $\tau(u_j^*) = 0$ $(j = 1, 2)$. Es ist also

$$\sin\{\vartheta(u_j^* + \pi) + \vartheta(u_j^*)\} = 0.$$

Wegen $0 < \vartheta(u_j^* + \pi) + \vartheta(u_j^*) < 2\pi$ folgt daraus die für konjugierte Durchmesser charakteristische Beziehung für u_j^*. Da u_1^* und u_2^* sich um weniger als π unterscheiden, gehören sie zu verschiedenen Paaren konjugierter Durchmesser. Damit haben wir ohne Differenzierbarkeitsannahmen bewiesen:

Satz 1.2. *Jede konvexe Kurve mit Mittelpunkt besitzt mindestens zwei Paare konjugierter Durchmesser.*

R. INZINGER [6] hat eine Klasse von Kurven angegeben, welche genau zwei Paare konjugierter Durchmesser besitzen.

Von nun an wollen wir voraussetzen, daß die Indikatrix eine zweite Ableitung $\mathfrak{x}''(s)$ nach der MINKOWSKIschen Bogenlänge $s = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\mathfrak{x}}{dt} \right\| dt$ besitzt. Dieser Vektor $\mathfrak{x}''(s)$ läßt sich geometrisch als der MINKOWSKIsche Krümmungsvektor der Indikatrix auffassen. Da $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{x}'(s)$ linear unabhängig sind, gilt

$$\mathfrak{x}''(s) = -\varkappa_r(s)\, \mathfrak{x}(s) + \varkappa_t(s)\, \mathfrak{x}'(s).$$

Wir wollen $\varkappa_r$ bzw. $\varkappa_t$ als Radial- bzw. Tangentialkrümmung der Indikatrix auffassen.

RADON [10] hat diejenigen Kurven bestimmt, die zu jedem Durchmesser einen konjugierten besitzen. Für diese Kurven können wir jetzt eine Kennzeichnung in der MINKOWSKIschen Geometrie angeben:

Satz 1.3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine zweimal differenzierbare ebene Indikatrix eine* RADONsche *Kurve ist, ist* $\varkappa_t(s) = \text{const}$; *die Konstante hat notwendig den Wert* 0.

Zunächst sieht man, daß für eine RADONsche Kurve als Indikatrix tatsächlich $\varkappa_t(s) = 0$ ist. Denn $\mathfrak{x}'$ beschreibt wegen $\|\mathfrak{x}'\| = 1$ gerade den zu $\mathfrak{x}$ konjugierten Halbmesser, und dessen Tangentenrichtung $\mathfrak{x}''$ ist parallel zu $\mathfrak{x}$.

Sei nun umgekehrt $\varkappa_t(s) = \text{const}$. Dann folgt aus der Existenz konjugierter Durchmesser (Satz 1.2), daß die Konstante jedenfalls den Wert 0 haben muß, und daraus ergibt sich wegen

$$\mathfrak{x}'' = -\varkappa_r(s)\,\mathfrak{x},$$

daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ konjugierte Durchmesser sind; es gibt also zu jedem Durchmesser einen konjugierten. Damit ist Satz 1.3 bewiesen.

Jetzt fragen wir nach denjenigen unter den RADONschen Kurven, die die Eigenschaft haben, daß für sie in der durch sie metrisierten Ebene gilt $\varkappa_t = \text{const}$, $\varkappa_r = \text{const}$. Aus dem bereits Bewiesenen wissen wir $\varkappa_t = 0$. Dann ist also

$$\mathfrak{x}''(s) + \lambda\,\mathfrak{x}(s) = 0 \qquad (\lambda = \text{const}),$$

also

$$\mathfrak{x}(s) = \begin{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\,s\right) \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\,s + \gamma\right) \end{Bmatrix}$$

(bis auf einen konstanten Faktor und eine Parameterverschiebung; λ ist notwendig positiv, da die Indikatrix beschränkt ist). Da für ein $\bar{s}$

$$\mathfrak{x}'(s) = \mathfrak{x}(\bar{s}) \quad \text{wegen} \quad \|\mathfrak{x}'\| = 1 \quad \text{gilt},$$

hat man

$$\mathfrak{x}' = -\sqrt{\lambda}\begin{Bmatrix} \sin\left(\sqrt{\lambda}\,s\right) \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\,s + \gamma\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\bar{s}\right) \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\bar{s} + \gamma\right) \end{Bmatrix}.$$

Daraus schließen wir $\lambda = 1$. Wäre nämlich $\lambda < 1$, so könnten wir — da $\bar{s}$ stetig von s abhängt und mit s die ganze Indikatrix durchläuft — $\bar{s}$ so wählen, daß $\cos\sqrt{\lambda}\,\bar{s} = 1$ ist; dies ergibt aber einen Widerspruch, da $-\sqrt{\lambda}\cdot\sin\sqrt{\lambda}\,s$ absolut genommen kleiner als 1 sein müßte. Den Fall $\lambda > 1$ schließt man entsprechend aus. Also ist

$$\mathfrak{x}(s) = \begin{Bmatrix} \cos s \\ \cos\left(s + \gamma\right) \end{Bmatrix}.$$

$\gamma \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ergibt sich daraus, daß der Nullpunkt nicht auf der Indikatrix liegen soll. Dann ist die Indikatrix aber eine Ellipse und die Geometrie euklidisch.

Satz 1.4. *Die euklidischen Ebenen sind unter den* MINKOWSKI*schen dadurch gekennzeichnet, daß für die Indikatrix gilt* $\varkappa_l(s) = \text{const}$, $\varkappa_r(s) = \text{const}$. *Dabei ist notwendig* $\varkappa_l = 0$, $\varkappa_r = 1$.

Zugleich haben wir damit auch eine Kennzeichnung der Ellipsen unter den RADONschen Kurven; eine andere Kennzeichnung hat P. FUNK [5] angegeben.

Für die Krümmung beliebiger geschlossener Kurven gilt:

Satz 1.5. *Die Gesamtkrümmung* $\oint ||d\mathfrak{x}'||$ *einer zweimal differenzierbaren geschlossenen Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *in einer* MINKOWSKI*schen Ebene ist mindestens* 2Π, *und gleich* 2Π *genau wenn die Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *konvex ist (s bezeichnet die* MINKOWSKI*sche Bogenlänge).*

Der Beweis ergibt sich aus der Bedeutung von Π, da das Tangentenbild der Kurve die Indikatrix mindestens einmal überdeckt.

2. Gesamtkrümmung geschlossener Raumkurven.

In Satz 1.5 wurde die untere Grenze für die Totalkrümmung ebener geschlossener Kurven angegeben. Für den euklidischen Raum hat FENCHEL [4] bewiesen, daß $\oint ||d\mathfrak{x}'||$ mindestens 2π ist. Hier soll die gleiche Frage für einen beliebigen dreidimensionalen MINKOWSKI-Raum behandelt werden; die genaue untere Grenze

$$K = \inf \oint ||d\mathfrak{x}'||$$

für geschlossene, zweimal stetig differenzierbare Kurven $\mathfrak{x}(s)$ kann der Verfasser nicht angeben.

Satz 2.1. *Es gilt*

$$4 \leq K \leq \inf \Pi_{\mathfrak{E}} \leq 8,$$

wobei $\inf \Pi_{\mathfrak{E}}$ *die untere Grenze der Werte* Π *für die ebenen Mittelpunktsschnitte* $\mathfrak{E}$ *der Indikatrix bezeichnet.*

Die Abschätzung nach oben ist dabei unmittelbar klar (Satz 1.5). Die Abschätzung nach unten beruht auf folgendem Lemma:

Lemma. *Ein der Indikatrix einer* MINKOWSKI*schen Ebene einbeschriebenes Dreieck, welches den Nullpunkt im Innern oder auf dem Rande enthält, hat mindestens den Umfang* 4.

Beweis. Wenn das Dreieck den Nullpunkt auf dem Rande enthält, sind wir sofort fertig; denn dann ist eine Seite ein Durchmesser, also von der Länge 2, und die Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist dann wegen der Dreiecksungleichung mindestens 2.

Wenn das Dreieck Δ den Nullpunkt jedoch im Innern enthält, dann erzeugen wir durch Spiegelung von Δ am Nullpunkt ein neues Dreieck Δ'. Die aus Δ und Δ' bestehende Figur kann man sich dann zerfallen denken in ein Parallelogramm P und ein Sechseck S mit paarweise parallelen Seiten. O liegt im Innern sowohl von P als auch von S, und von P liegt ein diametrales Eckenpaar auf der Indikatrix, von S sogar zwei. Daraus ergibt sich aber, daß S und P je mindestens den Umfang 4 haben, wenn man die innerhalb von S

bzw. P verlaufenden Durchmesser benützt und die Dreiecksungleichung anwendet. Da der Umfang von Δ gleich dem arithmetischen Mittel der Umfänge von S und P ist, haben wir damit das Lemma bewiesen.

Zum Beweise von Satz 2.1 ziehen wir einen Satz von FENCHEL [4] heran: Im euklidischen Raume gilt, daß es zum Tangentenbild $\mathfrak{T}$ einer geschlossenen, stetig differenzierbaren Raumkurve mindestens einen Großkreis gibt, der von $\mathfrak{T}$ in zwei Diametralpunkten oder aber in drei Punkten getroffen wird, die den Kugelmittelpunkt im Innern des von ihnen aufgespannten Dreiecks enthalten. Projiziert man $\mathfrak{T}$ von 0 aus auf die Indikatrix des MINKOWSKIschen Raumes, so kann man diesen Satz sofort in die MINKOWSKIsche Geometrie übernehmen, wenn man statt „Großkreis" setzt: ebener Mittelpunktsschnitt der Indikatrix.

Dann folgt aber mit Hilfe des bewiesenen Lemmas aus der Extremaleigenschaft der geraden Linien sofort die Behauptung

$$\oint ||d\mathfrak{x}'|| \geq 4.$$

Es spricht vieles für $K \geq 6$ und manches für $K = \inf \Pi_{\mathfrak{C}}$. Der Beweis wird von den bekannten Beweisen des FENCHELschen Satzes im euklidischen Fall wesentlich abweichen müssen, da die Extremaleigenschaft der Großkreise hier fortfällt.

3. Kennzeichnungen euklidischer Räume beliebiger Dimension.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit reellen linearen Räumen L beliebiger Dimension, in denen eine Metrik $F(x)$ mit den in der Einleitung angegebenen Eigenschaften definiert ist. Ein solcher Raum heißt euklidisch, wenn die Metrik die Form hat $F(x) = (x, x)^{\frac{1}{2}}$, wobei (x, y) ein skalares Produkt ist, d.h. eine Bilinearform mit positiv-definitem (x, x). Die Hyperflächen $(x, x) = \text{const}$ heißen Ellipsoide. Die Auszeichnungen der euklidischen Räume unter den metrischen linearen Räumen laufen also parallel den Auszeichnungen der Ellipsoide unter den Sternbereichen.

Man bemerkt sofort, *daß ein metrischer linearer Raum genau dann euklidisch ist, wenn jeder dreidimensionale lineare Unterraum durch den Nullpunkt euklidisch ist;* denn in den Axiomen für das Skalarprodukt treten jeweils höchstens drei Vektoren auf.

Ein besonders schönes Beispiel für den Zusammenhang der Auszeichnungen der euklidischen Räume und der Ellipsoide ist der Projektionssatz von KAKUTANI [8]: Ein normierter Raum ist genau dann euklidisch, wenn es in ihm auf jeden zweidimensionalen Unterraum eine Projektion vom Betrage 1 gibt. Dieser Satz ist äquivalent mit dem Satz von BLASCHKE [1, 157]: Jeder konvexe Körper, der von allen Stützzylindern längs ebener Kurven berührt wird, ist ein Ellipsoid.

JORDAN und v. NEUMANN [7] haben mit Hilfe ihrer bekannten Bedingung $||x+y||^2+||x-y||^2=2\{||x||^2+||y||^2\}$ für Normen, die aus einem Skalarprodukt hervorgehen, geschlossen, daß ein normierter Raum genau dann euklidisch ist, wenn jeder zweidimensionale Unterraum (durch den Nullpunkt)

euklidisch ist. Wir wollen hier einen geometrischen Beweis für diesen Satz geben, wobei wir sogar allgemein metrische Räume zulassen.

Satz 3.1. *Ein metrischer Raum (Dimension ≥ 2) ist genau dann euklidisch, wenn jeder zweidimensionale lineare Unterraum euklidisch ist.*

Beweis. In einem euklidischen Raum ist offenbar jeder zweidimensionale lineare Unterraum euklidisch. Es muß also noch gezeigt werden: Wenn jeder zweidimensionale lineare Unterraum euklidisch ist, dann ist der Raum selbst euklidisch.

Dabei genügt es nach dem oben Bemerkten, dies für dreidimensionale metrische Räume zu beweisen.

Zunächst muß die Indikatrix streng konvex und symmetrisch zum Nullpunkt sein. Denn sind x, y zwei Punkte der Indikatrix, so betrachten wir die von den Vektoren x, y aufgespannte Ebene. In dieser ist die zweidimensionale Indikatrix nach Voraussetzung eine Ellipse; die Verbindungslinie von x, y liegt also im Innern der Indikatrix. Daraus folgt die strenge Konvexheit. Die Symmetrie zum Nullpunkt ergibt sich aus der Symmetrie der Ellipse. — Der metrische Raum ist also ein normierter Raum.

Nun betrachten wir irgendeine Ebene E durch den Nullpunkt und einen Punkt u der Indikatrix mit zu E paralleler Stützebene.

Durch die Ellipse $F(h) = 1$ in der Ebene E und die Punkte $\pm u$ ist durch die Bedingung, daß die Stützebene in u parallel zu E sein soll, eindeutig ein Ellipsoid mit Mittelpunkt 0 bestimmt. Wir werden fertig sein, wenn wir gezeigt haben, daß dieses Ellipsoid mit der Indikatrix $F(x) = 1$ zusammenfällt.

Das folgt aber so: Durch ihren Mittelpunkt und zwei konjugierte Durchmesser ist eine Ellipse völlig bestimmt. Nun schneiden wir das Ellipsoid und die Indikatrix mit einer Ebene durch u und h ($h \in E$) und erhalten als Schnittfigur in beiden Fällen Ellipsen mit Mittelpunkt 0 und u, $\frac{h}{F(h)}$ als Vektoren eines konjugierten Durchmesserpaares, da in beiden Fällen die Tangente in u parallel zu h sein muß. Also fallen die beiden Ellipsen zusammen. Da dies für alle $h \in E$ gilt, fallen die Indikatrix und das betrachtete Ellipsoid tatsächlich zusammen.

Die entsprechende affingeometrische Kennzeichnung der Ellipsoide lautet: Ein Sternbereich ist genau dann ein Ellipsoid, wenn alle Ebenen durch 0 mit dem Bereich Ellipsen vom Mittelpunkt 0 gemeinsam haben.

(Über die Stetigkeit der Begrenzung des Bereichs braucht dabei nichts vorausgesetzt zu werden.)

Eine Richtung in einem linearen Raum ist gegeben durch einen Halbstrahl $a \cdot x$, $x \neq 0$, $a \geq 0$. Als geometrische Eigenschaft in einem linearen metrischen Raume wird jede Eigenschaft bezeichnet, die nur affine und metrische Aussagen (im Sinne der F-Metrik) involviert. Wir können dann sagen: Zwei Richtungen heißen geometrisch gleichberechtigt, wenn in der durch sie aufgespannten Ebene jede gegenüber der zentrisch-affinen Gruppe invariante Eigenschaft der Indikatrix $F(x) = 1$ in der einen Richtung ihr auch in der anderen Richtung zukommt.

Satz 3.2. *Ein metrischer Raum, in dem $F(x)$ in jedem zweidimensionalen Unterraum stetig ist, ist genau dann euklidisch, wenn alle Richtungen geometrisch gleichberechtigt sind.*

Beweis. Nach Satz 3.1 kann man sich auf die Betrachtung metrischer Ebenen beschränken. Für diese ist zunächst klar, daß die geometrische Gleichberechtigung aller Richtungen notwendig ist für die Euklidizität. Denn in der euklidischen Ebene führt die orthogonale Gruppe eine beliebige Richtung in eine beliebige andere unter Erhaltung aller affinen und metrischen Eigenschaften über.

Wir haben jetzt zu zeigen, daß die Isotropie der Ebene hinreichend ist für die Euklidizität. Da F in der betrachteten Ebene stetig ist, folgt zunächst die Symmetrie der Indikatrix. Denn wäre $F(\mathring{x}) \neq F(-\mathring{x})$, so könnten wir etwa annehmen

$$1 = F(\mathring{x}) > F(-\mathring{x}).$$

Läßt man den Punkt y von $\dot{x}$ bis $\dot{\dot{x}} = \frac{-\mathring{x}}{F(-\mathring{x})}$ stetig auf der Indikatrix wandern, so gilt wegen

$$1 = F(\dot{\dot{x}}) = \frac{F(-\mathring{x})}{F(-\mathring{x})} < \frac{F(\mathring{x})}{F(-\mathring{x})} = F(-\dot{x}),$$

daß dazwischen einmal sein muß:

$$F(\tilde{x}) = F(-\tilde{x}) = 1.$$

Dies ist aber eine geometrische Eigenschaft, die also nach Voraussetzung allen Richtungen zukommen muß.

Im nächsten Beweisschritt zeigen wir, daß die Indikatrix konvex ist. Wegen der Stetigkeit ist sie jedenfalls eine beschränkte Punktmenge, und wir können daher eine Gerade finden, die die Indikatrix nicht trifft. Diese geht also auch nicht durch den Nullpunkt, und wir können sie solange auf den Nullpunkt zu parallel verschieben, bis sie die Indikatrix erstmals trifft. Ein Punkt z, den die Gerade in dieser Lage mit der Indikatrix gemein hat, definiert dann eine Richtung $0z$ mit der geometrischen Eigenschaft, daß die Indikatrix in dieser Richtung eine Stützgerade besitzt, d.h. eine solche Gerade durch z, daß eine der entstandenen Halbebenen keinen Punkt der Indikatrix enthält. Nach der Isotropievoraussetzung gilt dies dann aber für alle Richtungen, und daraus ergibt sich die Konvexheit der Indikatrix. Der Raum ist also normiert.

Die Indikatrix ist zweimal differenzierbar. Denn die Minkowskische Bogenlänge s ist ein monotoner Parameter für die konvexe Kurve, und die Komponenten des Vektors $x(s)$ sind daher stückweise monotone Funktionen von s. Nach Lebesgue existiert $x'(s) = \frac{dx}{ds}$ fast überall, also nach der Isotropievoraussetzung überall. Da s die Bogenlänge ist, gilt $F(x') = 1$, d.h. $x'(s)$ beschreibt ebenfalls die Indikatrix, also eine konvexe Kurve. Nach der gleichen Argumentation wie eben existiert dann auch $x''(s)$. [Da im allgemeinen $F(x'')$ nicht konstant ist, können wir dieses Verfahren nicht fortsetzen.]

Nun können wir Satz 1.4 anwenden; die Radialkrümmung und die Tangentialkrümmung der Indikatrix sind ja Invarianten, müssen also nach der Isotropievoraussetzung Konstanten sein. Daraus folgt aber die Euklidizität der Ebene nach Satz 1.4.

Anstatt beim Beweis auf Satz 1.4 zurückzugreifen, hätten wir bei großzügigeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen auch bekannte Sätze der Affingeometrie heranziehen können. Nach Blaschke [2, 47] gilt: Bei einer Eilinie mit Mittelpunkt gibt es immer mindestens 4 Geraden durch den Mittelpunkt, welche (doppelte) Affinnormalen der Eilinie sind. Nach der Isotropievoraussetzung gilt das dann für alle Geraden durch den Nullpunkt. Nach [2, 28] ist eine Kurve, bei der alle Affinnormalen durch einen Punkt gehen, ein Mittelpunktskegelschnitt, in unserem Falle also eine Ellipse.

Die in Satz 3.1 und Satz 3.2 ausgesprochenen Kriterien für lineare Räume, in denen die Metrik aus einem Skalarprodukt stammt, lassen sich sofort auf komplexe Vektorräume übertragen, wenn man beachtet, daß jeder komplexen Richtung eine Gausssche Ebene zugeordnet werden kann.

Satz 3.2 ermöglicht eine neue, von gruppentheoretischen Annahmen freie Lösung des „Raumproblems", d.h. der Frage nach der Auszeichnung der pythagoreischen Metrik. Diese Lösung, die auch die Metrik des quantenmechanischen Zustandsraumes erfaßt, wird an anderer Stelle ausgeführt[5]).

Literatur.

[1] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Leipzig 1916. — [2] Blaschke, W.: Differentialgeometrie, Bd. II. Berlin 1923. — [3] Bonnesen, T., u. W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1935. — [4] Fenchel, W.: Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. Math. Ann. **101**, 238—252 (1929). — [5] Funk, P.: Eine Kennzeichnung der Ellipsen. Math. Z. **3**, 91 (1919). — [6] Inzinger, R.: Sui diametri coniugati delle ovali a centro. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (8) **3**, 293 (1947). — [7] Jordan, P., and J. v. Neumann: On inner products in linear metric spaces. Ann. of Math. (2) **36**, 719 (1935). — [8] Kakutani, Sh.: Some characterizations of Euclidean space. Jap. J. Math. **16**, 93—97 (1940). — [9] Laugwitz, D.: Über Normtopologien in linearen Räumen. Arch. d. Math. **4**, 455—460 (1953). — [10] Radon, J.: Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **68**, 123 (1916).

[5]) Über die Rolle der pythagoreischen Metrik in der Physik. Z. Naturforsch. **9**a (1954).

Göttingen, Nußanger 70.

(Eingegangen am 10. April 1954.)

Schubert, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 245—288 (1954)

Über eine numerische Knoteninvariante.

Von
Horst Schubert.

Die vorliegenden Untersuchungen schließen an die Abhandlung „Knoten und Vollringe" [5][1]) des Verfassers an, sind jedoch weitgehend unabhängig davon lesbar. Sie sind angeregt worden durch die Frage, ob ein Knoten nur endlich viele Begleitknoten besitzt und ob man den Begleitknoten Vielfachheiten so zulegen kann, daß man insbesondere für die Primfaktoren eines Produktknotens die Vielfachheiten in der Primfaktorzerlegung erhält. Beides kann bejaht werden (§ 8). Dazu ist notwendig, daß man im Besitze einer numerischen Knoteninvarianten ist, die mit der durch Begleitknoten definierten Anordnung von Knoten verträglich ist, d.h. die für die (orientierten und nichtorientierten) Begleitknoten eines Knotens $\varkappa$ kleiner als für $\varkappa$ selbst ist. Das Geschlecht (Seifert [6]) hat diese Eigenschaft zwar für orientierte Begleitknoten[2]), nicht dagegen für nichtorientierte, wie die Schlingknoten zeigen: Jeder vom Kreis verschiedene Schlingknoten hat das Geschlecht 1 (KV § 20), während der Diagonalknoten beliebiges Geschlecht haben kann. Auch die von Wendt [9] eingeführte gordische Invariante kommt nicht in Frage, da sie ebenfalls für jeden vom Kreis verschiedenen Schlingknoten den Wert 1 besitzt. Auch Homologieinvarianten scheiden aus, wie aus einer Abhandlung von Seifert [7] hervorgeht. Die minimale Überkreuzungszahl in den regulären Projektionen (Reidemeister [3]) und die Gesamtkrümmung von Knoten (Milnor [2]) haben vermutlich die gewünschte Eigenschaft.

Für die uns vorliegende Frage erwies sich eine neue Invariante als handlich, die von den genannten unabhängig ist. Wir betrachten dazu Brückendarstellungen von Knoten (§ 1), d.h. Knotenlinien, die aus Streckenzügen in zwei parallelen Ebenen und dazu senkrechten Strecken bestehen. Dabei ist die Anzahl der senkrechten Strecken stets gerade, und wir bezeichnen die halbe Anzahl als Brückenzahl der Darstellung. Die minimale Brückenzahl eines Knotens ist die minimale Brückenzahl in allen seinen Brückendarstellungen.

Ist λ ein Begleitknoten der Ordnung α des Knotens $\varkappa$ und bezeichnet $b(\lambda)$ bzw. $b(\varkappa)$ die minimale Brückenzahl von λ bzw. $\varkappa$, so gilt (§ 8)

$$\alpha\, b(\lambda) \leq b(\varkappa). \tag{1}$$

Für $\alpha = 1$ kann das Gleichheitszeichen nicht gelten, so daß stets $b(\lambda) < b(\varkappa)$ ist. Wenn $\varkappa$ ein Schlingknoten mit dem Diagonalknoten λ ist, so gilt in (1)

[1]) Diese Abhandlung wird im folgenden mit KV zitiert. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) KV § 12 und § 15 Satz 3.

das Gleichheitszeichen mit $\alpha = 2$ (§ 10). Für einen Knoten $\varkappa$, der sich als Schlauchzopf der Fädenzahl α mit dem Träger λ darstellen läßt, insbesondere für Schlauchknoten, gilt in (1) ebenfalls das Gleichheitszeichen (§ 11). Für das Produkt von Knoten ist die um 1 verminderte minimale Brückenzahl additiv (§ 9).

§ 1. Vorbemerkungen.

Wie in KV verstehen wir unter einem Komplex eine Punktmenge eines euklidischen Raumes, die sich in endlich viele euklidische Simplexe zerlegen läßt. Wege, Flächen, Kugeln, Vollringe sollen stets solche Komplexe sein, wobei unter einer Kugel ein semilineares Bild eines 3-Simplexes zu verstehen ist. Simpliziale Zerlegungen eines Komplexes sind stets solche in euklidische Simplexe. Die 3-Sphäre $\mathfrak{S}^3$ sei der Rand eines euklidischen 4-Simplexes. Wir werden unsere Betrachtungen in der $\mathfrak{S}^3$ durchführen. Um jedoch die Begriffe und Anschauungsmöglichkeiten des dreidimensionalen euklidischen Raumes zu Hilfe nehmen zu können, treffen wir folgende Vereinbarungen:

Es sei $\mathfrak{E}^3$ ein 3-Simplex, das die 3-Sphäre $\mathfrak{S}^3$ mit dem dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 gemein hat. Alle im Verlaufe der Untersuchungen auftretenden Knotenlinien und Flächen sollen, abgesehen von Ebenen- und Tetraederscharen, im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen, so daß wir die Einbettung in die $\mathfrak{S}^3$ und die Einbettung in den R^3 nebeneinander benutzen können. Für die Einbettung in den R^3 bedeutet die Forderung, daß die betrachteten Knotenlinien und Flächen im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen sollen, keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich dies stets durch eine Ähnlichkeitsabbildung des R^3 erreichen läßt.

Wir werden Knotenlinien und Flächen orientierungserhaltenden semilinearen Abbildungen[3]) (*s*-Abbildungen) der $\mathfrak{S}^3$ auf sich und des R^3 auf sich unterwerfen. Für die *s*-Abbildungen der $\mathfrak{S}^3$ auf sich wird aus dem Zusammenhang stets ohne weiteres klar sein, daß die Bilder der betrachteten Knotenlinien und Flächen im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen. Wenn wir *s*-Abbildungen des R^3 auf sich angeben, so sind diese nötigenfalls mit einer geeigneten Ähnlichkeitsabbildung des R^3 zusammenzusetzen, so daß die Bilder der betrachteten Knotenlinien und Flächen wieder im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen. Außerdem sollen von § 5 an die angegebenen *s*-Abbildungen des R^3 stets nur beschreiben, wie die Knotenlinien und Flächen abgebildet werden. Die Abbildung ist stets noch so abgeändert zu denken, daß sie im Komplement von $\mathfrak{E}^3$ die Identität ist[4]), so daß eine *s*-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich induziert wird, welche ebenfalls im Komplement von $\mathfrak{E}^3$ die Identität ist. Durch Angabe einer *s*-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich oder des R^3 auf sich wird dann also stets eine *s*-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich bezeichnet, welche die jeweils betrachteten Knotenlinien und Flächen so abbildet, daß die Bilder im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen.

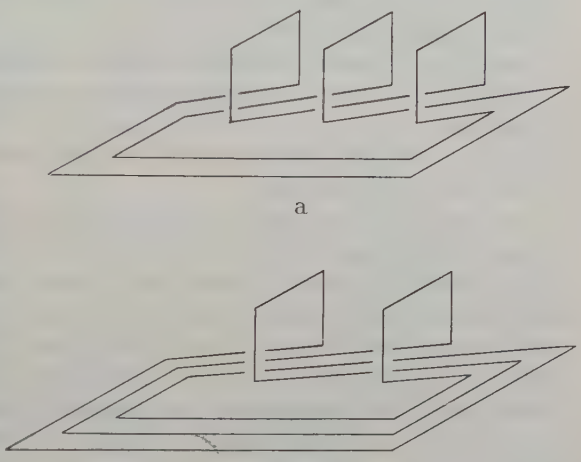
---

[3]) Bezüglich *s*-Abbildungen s. GRAEUB [*I*]. Die benutzten Resultate finden sich in KV zusammengestellt. Der Einfachheit halber zitieren wir sie in KV. Für die Beweise ist auf [*I*] zurückzugreifen.

[4]) Vgl. hierzu KV § 1 Sätze 4, 5 und die daran geknüpften Bemerkungen.

§ 2. Brückendarstellungen eines Knotens.

Wir betrachten im R^3 zwei „waagerechte" Ebenen E_1 und E_2, wobei E_1 die „obere", E_2 die „untere" Ebene sei. Die zu E_1 und E_2 orthogonalen Geraden und Strecken bezeichnen wir als senkrecht. k sei eine Knotenlinie der folgenden Gestalt: k bestehe aus Streckenzügen in E_1 und E_2 und senkrechten Strecken, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Wir sagen, daß k eine *Brückendarstellung* des von k repräsentierten Knotens ist. Unter einer *Brücke* von k verstehen wir einen Teilstreckenzug von k, der aus einem in E_1 liegenden Streckenzug und den beiden anstoßenden senkrechten Strecken besteht. Die in E_2 liegenden Endpunkte der beiden senkrechten Strecken nennen wir *Fußpunkte* der Brücke. E_1, E_2 bezeichnen wir als die *Grenzebenen* der Brückendarstellung. Fig. 1 a u. b zeigt zwei Brückendarstellungen einer Kleeblattschlinge. In Fig. 1 a besitzt die Knotenlinie drei Brücken, in Fig. 1 b zwei. Brückendarstellungen von nichtorientierten Knoten sind entsprechend definiert. Von einer Brückendarstellung kann stets angenommen werden, daß für jede Brücke der in der oberen Ebene E_1 liegende Teil eine einzige Strecke ist. Dies läßt sich offenbar durch eine s-Abbildung des R^3 erreichen, welche die senkrechten Geraden permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt.



a

b

Fig. 1.

Jeder Knoten besitzt eine Brückendarstellung. Man erkennt dies, wenn man von einer regulären Projektion[5]) dieses Knotens ausgeht und für jede Überkreuzung eine Brücke einführt. Der Kreis ist der einzige Knoten, der eine „Brückendarstellung ohne Brücke" besitzt, d. h. der durch eine ebene Knotenlinie dargestellt werden kann. Wir wollen diese Darstellung ausschließen, so daß jede Brückendarstellung des Kreises (und damit jedes Knotens) mindestens eine Brücke besitzt.

Unter den Brückendarstellungen eines Knotens oder nichtorientierten Knotens $\varkappa$ betrachten wir eine solche mit möglichst kleiner Brückenzahl. Die Brückenzahl einer solchen Darstellung nennen wir die *minimale Brückenzahl* von $\varkappa$ und bezeichnen sie mit $b(\varkappa)$.

Satz 1. *Der Kreis ist der einzige Knoten mit minimaler Brückenzahl* 1.

[5]) Im Sinne von Reidemeister [3].

Beweis. Der Kreis besitzt offenbar eine Brückendarstellung mit nur einer Brücke. Sei nun k die Brückendarstellung eines Knotens, die nur eine Brücke besitzt. Wie oben bemerkt wurde, kann angenommen werden, daß der in der oberen Ebene liegende Teil von k eine Strecke ist. In der unteren Ebene bildet k einen einzigen Streckenzug u, der die Fußpunkte der Brücke verbindet. u liegt im Inneren eines genügend großen 2-Simplexes der unteren Ebene, und es läßt sich dieses zu einer 2-Sphäre $\mathfrak{S}^2$ ergänzen, die mit der Brücke nur die Fußpunkte (also mit k nur u) gemein hat. Nun ist u auf $\mathfrak{S}^2$ zu der geradlinigen Verbindungsstrecke der Brückenfußpunkte kombinatorisch isotop[6]), woraus folgt, daß k kombinatorisch isotop zu einem rechteckigen Streckenzug, also unverknotet ist.

Die oben definierte Brückendarstellung von Knoten ist der Einbettung in den R^3 angepaßt. Für die Einbettung in die $\mathfrak{S}^3$ eignet sich eine allgemeinere Darstellung besser, die wir im folgenden als verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art angeben werden. Zuvor führen wir eine Darstellung ein, die zwischen beiden steht.

Es seien E_1 und E_2 wieder zwei waagerechte Ebenen, wobei E_1 die obere, E_2 die untere Ebene sei. Ein Streckenzug, für welchen keine zwei Punkte in derselben waagerechten Ebene liegen, heiße *monoton*. k sei eine Knotenlinie, die aus Streckenzügen in E_1, Streckenzügen in E_2 und monotonen Streckenzügen besteht, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Dabei sollen keine zwei monotonen Streckenzüge einen Endpunkt gemein haben und mindestens zwei monotone Streckenzüge vorhanden sein. Eine solche Knotenlinie k nennen wir eine *verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art* des von k repräsentierten Knotens. Unter einer Brücke verstehen wir hier einen Teilstreckenzug von k, der aus einem in E_1 liegenden Streckenzug und den beiden anstoßenden monotonen Streckenzügen besteht.

Eine Brückendarstellung eines Knotens ist insbesondere eine verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art, und jede verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art läßt sich in eine Brückendarstellung mit gleicher Brückenzahl überführen. Dies folgt aus

Hilfssatz 1. *Es seien E_1, E_2 zwei waagerechte Ebenen im R^3, wobei E_1 die obere Ebene sei. $h_1, h_2, \ldots, h_n$ seien paarweise punktfremde monotone Streckenzüge, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Dann gibt es eine s-Abbildung des R^3 auf sich mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$h_1, h_2, \ldots, h_n$ werden auf senkrechte Strecken abgebildet.*
2. *Jede waagerechte Ebene wird auf sich abgebildet.*
3. *Die Abbildung ist oberhalb E_1 und außerhalb eines beliebig vorgegebenen senkrechten Zylinders, der $h_1, h_2, \ldots, h_n$ im Inneren enthält, die Identität.*
4. *Jede senkrechte Halbgerade unterhalb E_2 wird in eine solche übergeführt.*

Beweis. Es reicht aus, den Hilfssatz für den speziellen Fall zu beweisen, daß $h_1, h_2, \ldots, h_n$ Strecken sind, deren senkrechte Projektionen sich nicht

[6]) SCHUBERT [4], § 1 Hilfssatz 4.

treffen. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus durch wiederholte Anwendung, denn durch geeignete Wahl von endlich vielen waagerechten Ebenen zwischen E_1 und E_2 läßt sich der von E_1 und E_2 begrenzte Bereich so in „Schichten" zerlegen, daß für jede Schicht die Voraussetzungen des speziellen Falles erfüllt sind.

Sind im speziellen Falle alle Strecken $h_1, h_2, \ldots, h_n$ senkrecht, so leistet die Identität das Gewünschte. Sei nun etwa h_i nicht senkrecht. P_1 bzw. P_2 seien die Endpunkte von h_i in E_1 bzw. E_2. Q_2 liege senkrecht unter P_1 in E_2 (Fig. 2). Da sich die senkrechten Projektionen je zweier monotoner Strecken $h_1, h_2, \ldots, h_n$ nicht treffen, kann auf E_2 ein 2-Simplex e so gewählt werden, daß die Strecke P_2Q_2 im Inneren von e und e im Inneren des vorgegebenen senkrechten Zylinders liegt und daß das 3-Simplex $\mathfrak{E}$, das e zur Seite und P_1 zur gegenüberliegenden Ecke hat, zu den von h_i verschiedenen monotonen Strecken $h_1, h_2, \ldots, h_n$ punktfremd ist. Es gibt nun eine s-Abbildung ψ von e auf sich, welche P_2 in Q_2 überführt und auf dem Rande von e die Identität ist. Diese Abbildung erweitern wir zu einer Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf sich, indem wir die Projektionsstrahlen von P_1 nach den Punkten von e entsprechend ψ permutieren und affin abbilden. Wir bezeichnen diese Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf sich wieder mit ψ. Wir setzen nun ψ außerhalb $\mathfrak{E}$ auf den zwischen E_1 und E_2 liegenden Bereich durch die Identität fort, ebenso oberhalb E_1. Unterhalb E_2 wird ψ dadurch definiert, daß die von E_2 nach unten gehenden senkrechten Halbgeraden entsprechend der bereits in E_2 definierten Abbildung permutiert werden, so daß nun ψ eine s-Abbildung des R^3 auf sich ist, welche die im Hilfssatz angegebenen Eigenschaften 2, 3, 4 besitzt. Es können mehrere solche Abbildungen ausgeführt werden, bis alle monotonen Strecken senkrecht sind, wodurch für den speziellen Fall die gewünschte s-Abbildung entsteht.

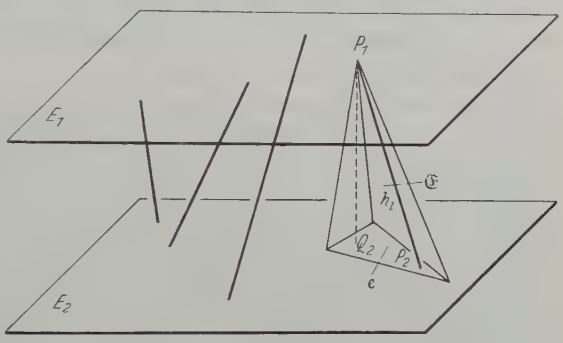


Fig. 2.

Es sei jetzt E ein Tetraeder, d.h. der Rand eines 3-Simplexes, und es sei Z der Mittelpunkt von E. Wir sagen, daß zwei Punkte des R^3 dieselbe *zentrische Distanz* von Z haben, wenn sie auf einem Tetraeder liegen, das aus E durch eine Dehnung mit dem Zentrum Z entsteht, wobei als Dehnungsfaktoren alle positiven reellen Zahlen zugelassen sind. Ein Streckenzug heiße *zentrisch monoton* (bezüglich des Zentrums Z), wenn für ihn keine zwei Punkte dieselbe zentrische Distanz haben. Eine s-Abbildung des R^3 auf sich nennen wir *zentrisch* (zum Zentrum Z), wenn sie jeden Punkt in einen Punkt derselben zentrischen Distanz überführt. Aus einer orientierungserhaltenden s-Abbildung φ von E auf sich erhält man eine zentrische Abbildung insbesondere

dadurch, daß man die von Z ausgehenden Projektionsstrahlen entsprechend φ permutiert und affin so abbildet, daß E in sich übergeht.

Hilfssatz 2. *Es sei E ein Tetraeder im R^3 mit dem Mittelpunkt Z. K sei eine abgeschlossene Punktmenge im Inneren von E, und es existiere ein zentrisch monotoner Streckenzug, der Z mit einem Punkt von E verbindet und zu K punktfremd ist. Dann gibt es eine zentrische Abbildung zum Zentrum Z, bei welcher das Bild von K im Inneren des Projektionskegels von Z nach einer Seite von E liegt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ der Kegel, der von den Projektionsstrahlen von Z nach den Punkten der (zweidimensionalen) Seite $\mathfrak{e}$ von E gebildet wird. h sei ein zentrisch monotoner Streckenzug, der Z mit einem Punkte von E verbindet und zu K punktfremd ist. Es gibt offenbar einen von Z ausgehenden Projektionsstrahl, der mit h nur den Punkt Z gemein hat, und damit einen von Z ausgehenden Kegel von Projektionsstrahlen $\mathfrak{Q}$, der mit h ebenfalls nur den Punkt Z gemein hat. $\mathfrak{Q}$ schneidet aus E ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_1$ aus, dessen abgeschlossenes Komplement bezüglich E ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_2$ ist. Es gibt nun eine orientierungserhaltende s-Abbildung von E auf sich, welche $\mathfrak{f}_2$ in $\mathfrak{e}$ überführt, und diese läßt sich zu einer zentrischen Abbildung φ fortsetzen, indem man die von Z ausgehenden Projektionsstrahlen entsprechend permutiert und affin abbildet. Durch φ wird h in einen zentrisch monotonen Streckenzug übergeführt, der auf $\mathfrak{P}$ liegt und mit dem Rande von $\mathfrak{P}$ nur den Punkt Z gemein hat. Durch dieselbe Konstruktion wie im Beweise von Hilfssatz 1 ergibt sich nun eine zentrische Abbildung ψ, welche $\varphi(h)$ in eine Strecke überführt. Da K abgeschlossen und punktfremd zu h ist, folgt, daß es einen Kegel von Projektionsstrahlen gibt, der punktfremd zu $\psi\varphi(K)$ ist. Bildet man diesen Kegel durch eine zentrische Abbildung χ auf das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{P}$ ab, so liegt $\chi\psi\varphi(K)$ im Inneren von $\mathfrak{P}$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Es sei nun E_1 ein Tetraeder mit dem Mittelpunkt Z. E_2 entstehe aus E_1 durch Dehnung mit dem Zentrum Z und enthalte E_1 im Inneren. k sei eine Knotenlinie, die aus Streckenzügen auf E_1, Streckenzügen auf E_2 und zentrisch monotonen Streckenzügen (bezüglich des Zentrums Z) besteht, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Dabei sollen keine zwei zentrisch monotonen Streckenzüge einen Endpunkt gemein haben und mindestens zwei zentrisch monotone Streckenzüge vorhanden sein. Wir sagen dann, daß k eine *verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art* des von k repräsentierten Knotens ist. Unter einer Brücke verstehen wir hier einen Teilstreckenzug von k, der aus einem auf E_1 liegenden Streckenzug und den beiden anstoßenden zentrisch monotonen Streckenzügen besteht. E_1 nennen wir das *innere Grenztetraeder* der Darstellung, E_2 das *äußere*, und wir bezeichnen Z als das *Zentrum* der Darstellung. Eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art wird durch eine zentrische Abbildung (zum Zentrum der Darstellung) offenbar in eine solche mit gleicher Brückenzahl übergeführt.

Eine verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art eines Knotens mit der Knotenlinie k, insbesondere eine Brückendarstellung, kann leicht in eine

verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit derselben Knotenlinie k und derselben Brückenzahl verwandelt werden, indem man geeignete 2-Simplexe in den Grenzebenen der verallgemeinerten Brückendarstellung erster Art zu geeigneten Tetraedern ergänzt. Umgekehrt folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 ohne weiteres

Hilfssatz 3. *Es sei k die Knotenlinie einer verallgemeinerten Brückendarstellung zweiter Art des Knotens $\varkappa$, Z das Zentrum dieser Darstellung. Dann gibt es eine zentrische Abbildung (zum Zentrum Z), welche k in die Knotenlinie einer Brückendarstellung von $\varkappa$ mit gleicher Brückenzahl überführt.*

Wir hätten die minimale Brückenzahl eines Knotens also auch als kleinste Brückenzahl seiner verallgemeinerten Brückendarstellungen zweiter Art definieren können. Im Beweise von Satz 1 haben wir bereits implizit von einer verallgemeinerten Brückendarstellung zweiter Art Gebrauch gemacht.

§ 3. Ebenen- und Tetraederscharen, die zulässig in bezug auf eine Fläche sind.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche im R^3. Mit Graeub [1][1]) nennen wir eine Schar paralleler Ebenen (E) *zulässig in bezug auf* $\mathfrak{F}$, wenn für jede Scharebene der Durchschnitt mit $\mathfrak{F}$ nur aus Schnittlinien, in denen sich $\mathfrak{F}$ und die Scharebene durchdringen, und isolierten Punkten besteht. Die Schnittlinien können sich gegenseitig treffen in Punkten, die als *Ausnahmeecken* von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E) bezeichnet werden. Da von jeder Ausnahmeecke eine gerade Anzahl von Schnitten ausgeht, können die Schnittlinien als geschlossen und doppelpunktfrei aufgefaßt werden. *Die Ordnung eines Punktes P von $\mathfrak{F}$ bezüglich* (E) ist dann die um 1 verminderte Anzahl der durch P gehenden Schnittlinien von $\mathfrak{F}$ mit der Scharebene durch P. Isolierte Punkte im Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit einer Scharebene besitzen also die Ordnung -1 bezüglich (E), Ausnahmeecken eine Ordnung, die mindestens gleich 1 ist, während alle übrigen Punkte von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E) die Ordnung Null besitzen. Die Anzahl der Punkte mit von Null verschiedener Ordnung ist endlich.

Diese Begriffe übertragen sich ohne weiteres, wenn man die Schar paralleler Ebenen durch eine Schar konzentrischer Tetraeder ersetzt, die auseinander durch Dehnung mit dem gemeinsamen Mittelpunkt als Zentrum entstehen. Dabei ist vorauszusetzen, daß das Zentrum der Tetraederschar nicht auf $\mathfrak{F}$ liegt. Aus einer in bezug auf $\mathfrak{F}$ zulässigen Schar paralleler Ebenen (E) läßt sich offenbar eine Schar konzentrischer Tetraeder erhalten, die zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$ ist und in bezug auf welche jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ dieselbe Ordnung wie in bezug auf (E) besitzt. Das Umgekehrte gilt nur, wenn der von $\mathfrak{F}$ berandete kompakte Bereich K die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt, und folgt dann aus Hilfssatz 2 und dem folgenden Hilfssatz 4, der sich ohne weiteres aus den Definitionen ergibt.

[1]) Siehe auch KV § 4. Die hier gegebenen Definitionen weichen von denen bei Graeub ab, sind jedoch gleichwertig mit diesen.

Hilfssatz 4. *Die Schar konzentrischer Tetraeder* (E) *mit dem Zentrum* Z *sei zulässig in bezug auf die geschlossene Fläche* $\mathfrak{F}$. *Unterwirft man* $\mathfrak{F}$ *einer zentrischen Abbildung zum Zentrum* Z, *so ist die Schar* (E) *zulässig in bezug auf das Bild von* $\mathfrak{F}$, *und bei diesem hat jeder Punkt in bezug auf* (E) *dieselbe Ordnung wie sein Urbildpunkt.*

Ein entsprechender Satz gilt für zulässige Scharen paralleler Ebenen und s-Abbildungen des R^3, die jede Scharebene auf sich abbilden. Für Scharen paralleler Ebenen gilt ferner, daß eine in bezug auf $\mathfrak{F}$ zulässige Schar paralleler Ebenen zulässig bleibt und die Ordnungen der Punkte von $\mathfrak{F}$ erhalten bleiben, wenn man die Ebenen der Schar einer Drehung um einen genügend kleinen Winkel unterwirft[2]). Ein entsprechender Satz gilt nicht für Scharen konzentrischer Tetraeder, wir werden jedoch Anwendungen des für Ebenenscharen geltenden Satzes machen können, wenn wir diejenigen Teile von $\mathfrak{F}$ betrachten, die im Inneren des Projektionskegels vom Zentrum nach einer Seite eines Schartetraeders liegen.

Hilfssatz 5. *Im* R^3 *sei* (E) *eine Schar konzentrischer Tetraeder mit dem Zentrum* Z, *und es sei* $\mathfrak{F}$ *eine geschlossene Fläche. Es gibt eine* s*-Abbildung* φ *des* R^3 *auf sich mit den folgenden Eigenschaften:*

1. (E) *ist zulässig in bezug auf* $\varphi(\mathfrak{F})$.
2. *Jede Ausnahmeecke von* $\varphi(\mathfrak{F})$ *bezüglich* (E) *hat die Ordnung* 1.
3. *Auf keinem Schartetraeder liegen* 2 *Punkte von* $\varphi(\mathfrak{F})$, *die bezüglich* (E) *eine von Null verschiedene Ordnung haben.*
4. φ *ist außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von* $\mathfrak{F}$ *die Identität.*

Beweis. Wenn man eine vorgegebene simpliziale Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{F}$ simplizial so zerlegt, daß auch $\mathfrak{F}$ simplizial ist, so erhält man eine isotope simpliziale Deformation[3]) dieser Umgebung, wenn man die auf $\mathfrak{F}$ liegenden Ecken hinreichend wenig verschiebt. Das Deformationsresultat kann auch durch eine s-Abbildung erhalten werden, welche außerhalb $\mathfrak{U}$ die Identität ist. Auf diese Weise läßt sich zunächst erreichen, daß in einer simplizialen Zerlegung von $\mathfrak{F}$ keine Gerade durch zwei Ecken der Zerlegung zu einer Seite der Schartetraeder parallel ist, daß das Zentrum der Schar (E) nicht auf $\mathfrak{F}$ liegt und daß keine Ecke von $\mathfrak{F}$ auf einem Projektionsstrahl vom Scharzentrum nach einem Punkte einer Tetraederkante liegt. Die Schar (E) ist dann zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$.

Da nun nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E) eine von Null verschiedene Ordnung haben, kann nach Hilfssatz 2 durch eine zentrische Hilfsabbildung σ erreicht werden, daß alle diese Punkte im Inneren eines Projektionskegels $\mathfrak{P}$ vom Scharzentrum nach einer Tetraederseite liegen. Zur Fixierung der Sprechweise bezeichnen wir die hierbei benutzte Tetraederseite als waagerecht.

Es sei nun P eine Ausnahmeecke von $\sigma(\mathfrak{F})$, deren Ordnung bezüglich (E) größer als 1 ist. $\mathfrak{W}$ sei ein Würfel, der P im Inneren enthält und der im

[2]) GRAEUB [1] S. 21.
[3]) Siehe hierzu KV § 1.

Inneren von $\mathfrak{P}$ und $\sigma(\mathfrak{U})$ liegt. $\mathfrak{W}$ soll so gewählt werden, daß keine Kante von $\mathfrak{W}$ waagerecht ist, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{W}$ mit $\sigma(\mathfrak{F})$ nur aus Punkten eines Simplexsternes mit dem Mittelpunkt P besteht und daß keine Kante dieses Simplexsternes eine Kante von $\mathfrak{W}$ trifft. Der Durchschnitt von $\sigma(\mathfrak{F})$ mit dem Rande von $\mathfrak{W}$ ist dann eine geschlossene, doppelpunktfreie Schnittlinie s. Auf $\sigma(\mathfrak{F})$ berandet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$, das P enthält. Der Rand von $\mathfrak{W}$ wird durch s in zwei Elementarflächenstücke zerlegt, eines davon sei $\mathfrak{e}$. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ beranden zusammen eine auf $\mathfrak{W}$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$, deren Durchschnitt mit $\sigma(\mathfrak{F})$ nur aus $\mathfrak{f}$ besteht. Durch eine s-Abbildung, die auf $\sigma(\mathfrak{F}) - \mathfrak{f}$ und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$, insbesondere also außerhalb $\sigma(\mathfrak{U})$, die Identität ist[4]), kann nun $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{e}$ übergeführt werden. Für die aus $\sigma(\mathfrak{F})$ entstandene Fläche, die wir wieder mit $\sigma(\mathfrak{F})$ bezeichnen wollen, ist die Schar (E) wieder zulässig, und für ihre auf dem Rande von $\mathfrak{W}$ liegenden Punkte können bezüglich (E) nur die Ordnungen $-1, 0$ und 1 auftreten, wie sich unmittelbar aus der Wahl von $\mathfrak{W}$ ergibt. Das Verfahren kann solange fortgesetzt werden, bis $\sigma(\mathfrak{F})$ bezüglich (E) nur noch Ausnahmeecken der Ordnung 1 besitzt.

Wir betrachten nun alle Punkte von $\sigma(\mathfrak{F})$ mit von Null verschiedener Ordnung. Sie liegen im Inneren von $\mathfrak{P}$ und sind Ecken jeder simplizialen Zerlegung von $\sigma(\mathfrak{U})$, für welche $\sigma(\mathfrak{F})$ simplizial ist. Wir nehmen eine solche Zerlegung vor und zwar so fein, daß für jeden Punkt P mit von Null verschiedener Ordnung der Simplexstern mit dem Mittelpunkt P innerhalb $\mathfrak{P}$ liegt. Wenn man nun die Punkte mit von Null verschiedener Ordnung hinreichend wenig verschiebt, so erhält man eine isotope simpliziale Deformation von $\sigma(\mathfrak{U})$, bei welcher (E) zulässig in bezug auf $\sigma(\mathfrak{F})$ bleibt und jeder Punkt von $\sigma(\mathfrak{F})$ in einen solchen von gleicher Ordnung bezüglich (E) übergeht. Auf diese Weise läßt sich erreichen, daß für $\sigma(\mathfrak{F})$ keine zwei Punkte mit von Null verschiedener Ordnung auf demselben Schartetraeder liegen. Macht man noch die Hilfsabbildung σ rückgängig, so ergibt sich die Behauptung.

Zur geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ im R^3 betrachten wir nun zunächst wieder eine Schar paralleler Ebenen (E), die zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$ ist. Die Ebenen der Schar mögen waagerecht heißen. P sei eine Ausnahmeecke der Ordnung 1 von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E), so daß es im Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit der waagerechten Ebene E durch P genau zwei Schnittlinien s_1 und s_2 durch P gibt. Auf s_1 und s_2 mögen keine weiteren Ausnahmeecken liegen. $\mathfrak{F}$ hat in P einen Sattel. Betrachtet man die waagerechten Ebenen, die zu der Ebene E benachbart sind, so bemerkt man, daß sich in P zwei vorher getrennte Schnittlinien zu einer einzigen vereinigen (bzw. eine Schnittlinie in zwei zerfällt, je nachdem von welcher Seite man an E herankommt), wenn man eine waagerechte Ebene parallel zu sich durch P hindurchschiebt. Fig. 3a—c zeigt den Sachverhalt, wenn sich s_1 und s_2 auf E nicht umfassen, Fig. 4a—c im anderen Falle. Benutzt man statt der Ebenenschar (E) eine Schar konzentrischer Tetraeder, so geht der in Fig. 4 dargestellte Fall in den von Fig. 3 über, da

[4]) Siehe hierzu KV § 1, Satz 11 und die anschließende Bemerkung.

s_1 und s_2 auf dem betreffenden Schartetraeder stets zwei Elementarflächenstücke beranden, die nur den Punkt P gemein haben. Aus diesem Grunde werden wir in unseren späteren Betrachtungen Scharen konzentrischer Tetraeder benutzen.

Kehren wir zur Ebenenschar (E) zurück. Wir wollen annehmen, daß $\mathfrak{F}$ durch s_1 zerlegt wird, und zwar so,

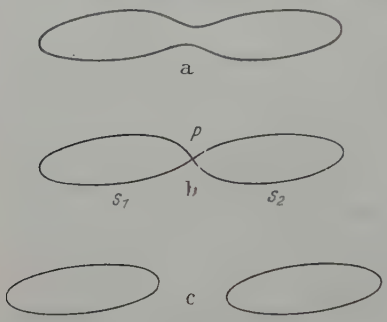


Fig. 3.

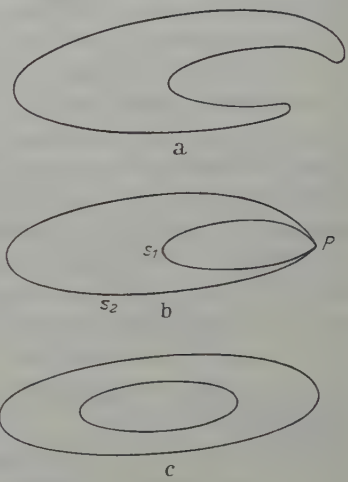


Fig. 4.

daß s_1 von $\mathfrak{F}$ ein Flächenstück $\mathfrak{h}$ abschneidet, welches s_2 nicht enthält und auf dem außer P keine weitere Ausnahmeecke von $\mathfrak{F}$ liegt. Wir bezeichnen dann $\mathfrak{h}$ als *Haube* von $\mathfrak{F}$ und s_1 als ihre *Grenzlinie*. Da s_2 nicht auf $\mathfrak{h}$ liegt, stößt $\mathfrak{h}$ von der Seite an E an, nach der s_1 und s_2 in disjunkte Schnittlinien übergehen, und bei Parallelverschiebung

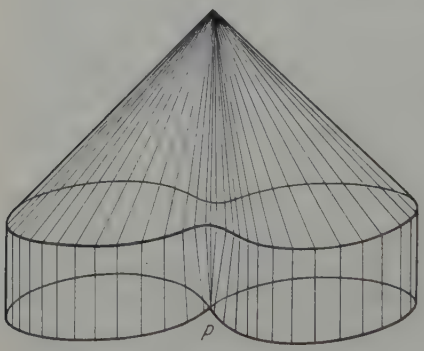


Fig. 5.

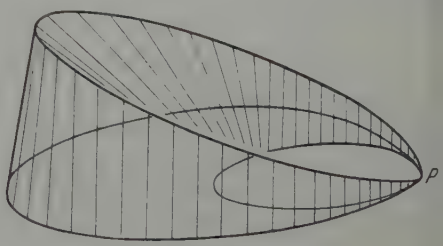


Fig. 6.

von E nach dieser Seite erhält man eine aus s_1 entstehende Schnittlinie mit $\mathfrak{h}$, die auf einen Punkt zusammenschrumpft und dann verschwindet. $\mathfrak{h}$ ist also ein Elementarflächenstück[5]). Wir nennen $\mathfrak{h}$ eine *obere* bzw. *untere Haube* von $\mathfrak{F}$, wenn $\mathfrak{h}$ von oben bzw. unten an E anstößt.

Wir wollen nun annehmen, daß s_1 und s_2 zusammen aus $\mathfrak{F}$ ein Flächenstück $\mathfrak{z}$ ausschneiden, auf dem außer P keine Ausnahmeecke liegt und das nicht aus zwei Hauben mit dem gemeinsamen Punkt P besteht. Wir nennen

[5]) Vgl. KV § 4, Satz 1.

dann $\mathfrak{z}$ ein *Knie* von $\mathfrak{F}$, s_1, s_2 seine *Grenzlinien*. $\mathfrak{z}$ stößt mit seinen Rändern s_1 und s_2 nur von einer Seite an E an, und zwar von derjenigen, nach der sich s_1 und s_2 zu einer einzigen Schnittlinie vereinigen, weil andernfalls $\mathfrak{z}$ aus zwei Hauben mit dem gemeinsamen Punkt P bestände. Verschiebt man E parallel zu sich nach dieser Seite, so entsteht aus s_1, s_2 eine einzige Schnittlinie, die in einen Punkt zusammenschrumpft und dann verschwindet. $\mathfrak{z}$ ist also[5]) eine Fläche vom Typus einer Kugelfläche mit zwei Löchern, deren Ränder genau einen Punkt gemein haben, wofür wir *Zweieck* sagen wollen. Fig. 5 und 6 zeigen je ein Knie. Wir nennen $\mathfrak{z}$ ein *oberes* bzw. *unteres Knie* von $\mathfrak{F}$, wenn $\mathfrak{z}$ von oben bzw. unten an E anstößt.

Es möge nun schließlich $\mathfrak{s}$ ein Kreisring auf $\mathfrak{F}$ sein, dessen Ränder s_1, s_2 in verschiedenen waagerechten Ebenen E_1, E_2 liegen. E_1 und E_2 sollen von $\mathfrak{s}$ nicht durchsetzt werden. Auf jedem der beiden Ränder s_1, s_2 von $\mathfrak{s}$ liege genau eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{F}$, und dies sollen die einzigen Ausnahmeecken von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{s}$ sein. Wir nennen dann $\mathfrak{s}$ einen *Schenkel* von $\mathfrak{F}$, s_1, s_2 seine *Grenzlinien*. Verschiebt man E_1 parallel zu sich nach E_2, so wird $\mathfrak{s}$ von der aus s_1 entstehenden Schnittlinie überstrichen.

Die eingeführten Begriffe Haube, Knie, Schenkel übertragen sich ohne weiteres, wenn statt der Schar paralleler Ebenen eine Schar konzentrischer Tetraeder mit dem Zentrum Z benutzt wird, die zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$ ist. An Stelle von Parallelverschiebungen treten Dehnungen mit dem Zentrum Z. Statt von oberen und unteren *Hauben* sprechen wir von *inneren und äußeren*, je nachdem sie von innen oder außen an das Schartetraeder durch ihre Grenzlinie anstoßen. Entsprechend ist die Sprechweise für Knie.

§ 4. Die Brückenform eines Torus.

Es sei $\mathfrak{T}$ ein Torus im Inneren des 3-Simplexes $\mathfrak{E}^3$, das die 3-Sphäre $\mathfrak{S}^3$ mit dem R^3 gemein hat. (E) sei eine Schar konzentrischer Tetraeder des R^3 mit dem Zentrum Z. Dabei möge (E) zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}$ sein, und jedes Schartetraeder, das $\mathfrak{T}$ trifft, möge im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen. In bezug auf die Schar (E) soll nun $\mathfrak{T}$ nur aus Knien und Schenkeln bestehen. An den beiden Grenzlinien eines Knies sollen also zwei Schenkel anstoßen und an jeder Grenzlinie eines Schenkels ein Knie. Dies impliziert, daß die Ausnahmeecken von $\mathfrak{T}$ bezüglich (E) die Ordnung 1 haben und daß auf jeder Schnittlinie von $\mathfrak{T}$ mit einem Schartetraeder höchstens eine Ausnahmeecke liegt. Wir verlangen außerdem noch, daß jede Grenzlinie der Schenkel auf ihrem Schartetraeder ein Elementarflächenstück berandet, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{T}$ nur aus seinem Rande besteht. Ein solches Elementarflächenstück ist Meridianfläche[1]) eines von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Vollringes $\mathfrak{V}$. Jeder Schenkel berandet zusammen mit den angegebenen Meridianflächen in seinen Grenzlinien eine auf $\mathfrak{V}$ liegende Kugel, ebenso jedes Knie, und es setzen sich alle diese Kugeln zu $\mathfrak{V}$ zusammen. Daraus folgt noch, daß jede Schnittlinie von $\mathfrak{T}$ mit einem Schartetraeder auf diesem ein ganz auf $\mathfrak{V}$ liegendes Elementar-

[1]) KV § 4, Beweis von Satz 2.

flächenstück berandet, und zwar eine Meridianfläche von $\mathfrak{V}$ genau dann, wenn die Schnittlinie auf einem Schenkel von $\mathfrak{T}$ liegt. Wir fordern nun schließlich noch, daß es ein Schartetraeder E_1 gibt, das alle inneren Knie von $\mathfrak{T}$ schneidet, und ein Schartetraeder E_2, das von allen äußeren Knien geschnitten wird. Alle Ausnahmeecken von $\mathfrak{T}$ liegen dann zwischen E_1 und E_2.

Wenn $\mathfrak{T}$ und die Schar (E) alle angegebenen Forderungen erfüllen, so wollen wir sagen, daß $\mathfrak{T}$ bezüglich der Schar (E) in *Brückenform* ist.

Hilfssatz 6. *Der Torus $\mathfrak{T}$ sei bezüglich der Schar konzentrischer Tetraeder (E) in Brückenform. $\mathfrak{V}$ sei der von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{E}^3$ berandete Vollring, auf welchem die Schnitte von $\mathfrak{T}$ mit den Schartetraedern nullhomolog sind. Dann gibt es eine Seele von $\mathfrak{V}$, die bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art des von ihr dargestellten nichtorientierten Knotens ist und deren Brückenzahl die halbe Anzahl der Schenkel von $\mathfrak{T}$ ist.*

Beweis. Das Schartetraeder E_1 schneide alle inneren Knie von $\mathfrak{T}$, das Schartetraeder E_2 alle äußeren. In jede Grenzlinie der Schenkel von $\mathfrak{T}$ spannen wir eine Meridianfläche von $\mathfrak{V}$ ein, die ganz auf dem durch die Grenzlinie bezeichneten Schartetraeder liegt. Dadurch zerfällt $\mathfrak{V}$ in Kugeln, und zwar in solche, die von je einem Schenkel von $\mathfrak{T}$ und zwei der bezeichneten Meridianflächen berandet werden, und solche, die von einem Knie von $\mathfrak{T}$ und zwei Meridianflächen berandet werden.

Sei $\mathfrak{K}$ eine solche Kugel, die von einem Schenkel und den beiden Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ berandet wird. Gibt man sich auf $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ je einen mittleren Punkt P_1 bzw. P_2 vor, so lassen sich P_1 und P_2 durch einen zentrisch monotonen Streckenzug u in $\mathfrak{K}$ verbinden. u ist Sehne von $\mathfrak{K}$ und zwar eine unverknotete. Dies folgt aus Satz 1 und Hilfssatz 3, da man u auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ offenbar so zu einer Knotenlinie schließen kann, daß diese bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit nur einer Brücke ist.

Sei nun $\mathfrak{K}$ eine Kugel auf $\mathfrak{V}$, die von einem Knie $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{T}$ und den zugehörigen Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ berandet wird. $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ haben genau einen Punkt A gemein, und es ist A Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{z}$ möge etwa ein inneres Knie von $\mathfrak{T}$ sein, also das Schartetraeder E_1 schneiden. Wählt man nun auf $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ je einen mittleren Punkt P_1 bzw. P_2 und auf dem Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit E_1 zwei nicht auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ liegende Punkte Q_1, Q_2, so lassen sich P_1, Q_1 und P_2, Q_2 durch disjunkte, zentrisch monotone Streckenzüge u_1, u_2 auf $\mathfrak{K}$ verbinden. Verbindet man noch Q_1, Q_2 durch einen Streckenzug u_3, der auf E_1 und im Inneren von $\mathfrak{K}$ liegt, so erhält man aus u_1, u_3, u_2 eine Sehne u von $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{K}$ unverknotet ist. Man kann nämlich ihre Endpunkte durch einen auf $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ liegenden Streckenzug (durch A hindurch) verbinden, wodurch man aus u eine Knotenlinie erhält, die bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit nur einer Brücke ist.

Man bemerkt nun, daß für jede der Kugeln, in die wir $\mathfrak{V}$ mittels der angegebenen Meridianflächen zerlegt haben, eine Sehne der beschriebenen Art

so gebildet werden kann, daß sich diese Sehnen zu einer Knotenlinie a im Inneren von $\mathfrak{V}$ zusammensetzen. a ist bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art des von a dargestellten nichtorientierten Knotens. Die Anzahl der zentrisch monotonen Streckenzüge von a ist gleich der Anzahl der Schenkel von $\mathfrak{T}$, und es ist a Seele von $\mathfrak{V}$. Dies folgt aus der Definition der Seelen eines Vollringes[2]), wenn man berücksichtigt, daß nach Wegnahme einer der Kugeln von $\mathfrak{V}$ eine Kugel $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{V}$ übrig bleibt, in der a eine unverknotete Sehne bildet[3]). Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Hilfssatz 6 läßt sich leicht umkehren: Gibt man sich eine Knotenlinie k vor, die bezüglich der Schar konzentrischer Tetraeder (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art ist, so erhält man bei geeigneter Wahl einer simplizialen Umgebung von k einen Vollring $\mathfrak{V}$, dessen Rand bezüglich der Schar (E) in Brückenform ist und für welchen k eine Seele der in Hilfssatz 6 beschriebenen Art ist.

Hilfssatz 7. *Es sei k eine Knotenlinie im Inneren des 3-Simplexes $\mathfrak{E}^3$, das die $\mathfrak{S}^3$ mit dem R^3 gemein hat. k sei bezüglich der Schar (E) konzentrischer Tetraeder des R^3 eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art des Knotens $\varkappa$, wobei das Scharzentrum im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liege. $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ seien verknotete Vollringe in der $\mathfrak{S}^3$, von denen jeder k so im Inneren enthalte, daß k nicht in einer auf $\mathfrak{V}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ liegenden Kugel enthalten ist. Außerdem sollen die Ränder $\mathfrak{T}_i$ der Vollringe $\mathfrak{V}_i$ paarweise punktfremd sein. Dann gibt es eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die k in eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art von $\varkappa$ bezüglich der Schar (E) mit gleicher Brückenzahl überführt und gleichzeitig die Tori $\mathfrak{T}_i$ in Brückenform bezüglich der Schar (E) bringt.*

Beweis. Wir können annehmen, daß die Tori $\mathfrak{T}_i$ im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen und ebenso die Schartetraeder, die einen solchen Torus oder k treffen, da sich dies durch eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich erreichen läßt, die $\mathfrak{E}^3$ ähnlich in sich zusammenzieht[4]). Nach Hilfssatz 5 kann ferner angenommen werden, daß die Schar (E) in bezug auf jeden Torus zulässig ist, daß nur Ausnahmeecken der Ordnung 1 auftreten und daß auf keinem Schartetraeder zwei Punkte der Tori $\mathfrak{T}_i$ mit von Null verschiedener Ordnung liegen. E_1 sei das innere Grenztetraeder für k, E_2 das äußere. Wie aus dem Beweise von Hilfssatz 5 hervorgeht, kann noch angenommen werden, daß für die Tori kein Punkt mit von Null verschiedener Ordnung auf E_1 oder E_2 liegt. Eine Schnittlinie eines Torus $\mathfrak{T}_i$ mit einem Schartetraeder zerlegt dieses in zwei Elementarflächenstücke und ist daher unverknotet. Wegen der Verknotung von $\mathfrak{V}_i$ ist sie[5]) entweder nullhomolog auf $\mathfrak{T}_i$ oder Meridian von $\mathfrak{V}_i$.

Der Beweis des Hilfssatzes erfolgt dadurch, daß wir soweit wie möglich Ausnahmeecken beseitigen. Wir führen ihn in 3 Teilen. Im ersten Teil (§ 5)

[2]) KV § 6.
[3]) Dies folgt aus KV § 5, Satz 3 und Hilfssatz 6.
[4]) Graeub [*1*] S. 14.
[5]) KV § 7, Hilfssatz 2.

werden für alle Tori Hauben beseitigt, bis keine mehr vorhanden sind. Im zweiten Teil (§ 6) beseitigen wir „Einstülpungen" der Tori. Danach sind die Tori in Brückenform, was im dritten Teil (§ 7) nachgewiesen wird.

Für die dabei angegebenen s-Abbildungen verweisen wir auf die Vereinbarungen in § 1. Zentrische Abbildungen beziehen sich auf das Zentrum Z der Schar (E).

§ 5. Beseitigung von Hauben.

Im ersten Schritt geben wir zunächst ein Verfahren zur Beseitigung einer Ausnahmeecke an, durch welche eine Schnittlinie von Torus und Schartetraeder geht, die auf dem Tetraeder ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück berandet. Die Beseitigung einer Haube wird hierauf zurückgeführt, indem die etwa störenden Teile der Tori $\mathfrak{T}_i$ und von k, die im „Inneren" der Haube liegen, eingezogen, unterhalb der Ausnahmeecke der Grenzlinie beiseite geschoben und wieder ausgedehnt werden. Wir führen dies im zweiten bis fünften Schritt aus. Zunächst wird im zweiten Schritt die Haube passend auf die beiden Elementarflächenstücke bezogen, in welche die Grenzlinie ihr Schartetraeder zerlegt, so daß man vom Inneren der Haube sprechen kann. Im dritten Schritt erfolgt eine Normierung der Haube. Danach können im vierten Schritt die im Inneren der Haube liegenden Teile der Tori und von k eingezogen und im fünften Schritt so ausgeschoben werden, daß k wieder eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit der ursprünglichen Brückenzahl ist, keine zusätzlichen Ausnahmeecken entstehen und der erste Schritt angewandt werden kann.

Erster Schritt. *Beseitigung einer Ausnahmeecke, wenn durch sie eine Schnittlinie von Schartetraeder und Torus geht, die auf dem Tetraeder ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück berandet.*

Es sei P eine Ausnahmeecke der bezeichneten Art, E das Schartetraeder durch P. Durch P geht eine Schnittlinie von E mit einem Torus, die auf E ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück $\mathfrak{c}$ berandet. Auf $\mathfrak{c}$ können noch weitere Schnittlinien von E mit den Tori $\mathfrak{T}_i$ liegen. Wir betrachten eine auf $\mathfrak{c}$ innerste Schnittlinie t, d.h. t berandet auf $\mathfrak{c}$ ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück $\mathfrak{c}'$. t liege etwa auf $\mathfrak{T}_h$. t ist nullhomolog auf $\mathfrak{T}_h$ und berandet auf $\mathfrak{T}_h$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$. Andernfalls wäre nämlich[1]) $\mathfrak{c}'$ eine zu k punktfremde Meridianfläche von $\mathfrak{V}_h$, woraus im Widerspruch zur Voraussetzung folgte[2]), daß k in einer auf $\mathfrak{V}_h$ liegenden Kugel enthalten wäre. Wir wollen t beseitigen, ohne neue Schnittlinien auf E oder neue Ausnahmeecken zu erzeugen.

$\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{f}$ bilden zusammen eine 2-Sphäre, welche die $\mathfrak{S}^3$ in zwei Kugeln $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zerlegt. Eine von beiden, etwa $\mathfrak{K}$, enthält k nicht. $\mathfrak{K}$ enthält auch $\mathfrak{T}_h - \mathfrak{f}$ und die von $\mathfrak{T}_h$ verschiedenen Tori nicht, da sonst $\mathfrak{K}'$ gegen Voraussetzung eine Kugel wäre, die k im Inneren enthält und auf einem der Vollringe $\mathfrak{V}_i$

[1]) KV § 3, Hilfssatz 2 und § 7, Satz 2.
[2]) KV § 9, Satz 1.

läge. Wir können nun eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich ausführen[3]), die $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{e}'$ abbildet und die auf $\mathfrak{T}_h - \mathfrak{f}$ und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$, insbesondere also auf k und den von $\mathfrak{T}_h$ verschiedenen Tori, die Identität ist.

Die Schar (E) ist jetzt nicht mehr zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}_h$, wir können dies jedoch wieder erreichen dadurch, daß wir $\mathfrak{e}'$ von E „abheben", und zwar so, daß $\mathfrak{T}_h$ zu den übrigen Tori und k punktfremd bleibt und daß eine Vereinfachung gegenüber dem ursprünglichen Zustand erzielt wird. Zunächst führen wir eine zentrische Abbildung aus, die $\mathfrak{e}$ und damit $\mathfrak{e}'$ in das Innere eines Projektionskegels vom Scharzentrum nach einer Tetraederseite bringt. Dies soll so geschehen, daß es danach in der Ebene von $\mathfrak{e}$ eine Gerade g durch P gibt, die $\mathfrak{e}'$ nicht trifft oder nur in P, wenn P auf dem Rande von $\mathfrak{e}'$ liegt. Es bedeutet nun für den aus k und den Tori $\mathfrak{T}_t$ bestehenden Komplex eine isotope simpliziale Deformation, wenn man die auf $\mathfrak{e}'$ liegenden Ecken einer simplizialen Zerlegung dieses Komplexes hinreichend wenig verschiebt. Diese Verschiebung soll nach der Seite von E erfolgen, von der her $\mathfrak{T}_h - \mathfrak{e}'$ mit t an E anstößt, und in eine Ebene, die aus der Ebene von $\mathfrak{e}$ durch Drehung um g mit hinreichend kleinem Drehwinkel entsteht. Falls P auf dem Rande von $\mathfrak{e}'$ liegt, ist P dabei festzuhalten. Bei genügend kleinem Drehwinkel und geeigneter Verschiebung der Ecken[4]) wird (E) zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}_h$, bleiben die Ordnungen der Punkte von $\mathfrak{T}_h - \mathfrak{e}'$ erhalten und entsteht keine Ausnahmeecke aus einem Punkte von $\mathfrak{e}'$. Falls P auf dem Rande von $\mathfrak{e}'$ liegt, ist P nicht mehr Ausnahmeecke.

Das beschriebene Verfahren kann für Schnittlinien auf $\mathfrak{e}$ solange angewandt werden, bis schließlich eine durch P gehende Schnittlinie beseitigt wird, also P nicht mehr Ausnahmeecke ist. Auf diese Weise beseitigen wir alle Ausnahmeecken der betrachteten Art. Insbesondere sind dann alle Ausnahmeecken innerhalb des Grenztetraeders E_1 von k und außerhalb E_2 beseitigt.

Zweiter Schritt. *Das Überschlagen einer Haube.*

Es sei $\mathfrak{h}$ eine Haube, etwa auf dem Torus $\mathfrak{T}_h$. Ihre Grenzlinie sei s_1 und liege auf dem Schartetraeder E. Auf s_1 liegt eine Ausnahmeecke P von $\mathfrak{T}_h$, und durch P geht eine zweite Schnittlinie s_2 von $\mathfrak{T}_h$ und E. Durch s_1, s_2 wird E in ein Zweieck $\mathfrak{y}$ und zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ zerlegt, wobei $\mathfrak{e}_1$ von s_1 berandet werde.

Sei zunächst $\mathfrak{h}$ eine innere Haube. In diesem Falle wird das von E berandete 3-Simplex durch $\mathfrak{h}$ in zwei Kugeln $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zerlegt, die von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ bzw. $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{h}$ berandet werden. Das innere Grenztetraeder E_1 von k wird von $\mathfrak{h}$ geschnitten. Andernfalls wäre nämlich eine der beiden Kugeln $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zu E_1 punktfremd und damit auch zu k, und eines der beiden von s_1 auf E berandeten Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{y}$ träfe k nicht, was nach dem ersten Schritte nicht mehr möglich ist. Das Zentrum Z der Schar (E) liegt

[3]) KV § 1, Satz 11 und die anschließende Bemerkung.

[4]) Graeub [*I*] S. 20, 23, 24. Vgl. auch KV § 4, Beweis von Satz 2.

nun entweder auf $\mathfrak{K}$ oder auf $\mathfrak{K}'$. Der zweite Fall ist der erwünschte, der erste läßt sich dadurch in den zweiten verwandeln, daß man $\mathfrak{h}$ „über Z hinweg schlägt“:

Es sei E_0 ein Schartetraeder, das von E_1 umfaßt wird und so nahe an E_1 liegt, daß es von $\mathfrak{h}$ geschnitten wird. Da auf $\mathfrak{h}$ außer P keine Ausnahmeecke liegt, besteht der Durchschnitt von $\mathfrak{h}$ und E_0 aus genau einer Schnittlinie s_0, die auf E_0 ein auf $\mathfrak{K}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_0$ berandet. Auf $\mathfrak{e}_0$ liegen außer dem Rande möglicherweise noch weitere Schnittlinien von E_0 mit $\mathfrak{T}_k$ und den übrigen Tori. Wie im ersten Schritt können diese der Reihe nach beseitigt werden, indem man mit einer auf $\mathfrak{e}_0$ innersten beginnt, und es kann dann schließlich auch die Schnittlinie s_0 von $\mathfrak{h}$ und E_0 beseitigt werden: Das von s_0 auf $\mathfrak{h}$ berandete Elementarflächenstück wird in $\mathfrak{e}_0$ übergeführt und dann von E_0 nach außen abgehoben. $\mathfrak{K}$ geht dabei in eine Kugel über, die Z nicht mehr enthält.

Wenn $\mathfrak{h}$ eine äußere Haube ist, so ist das abgeschlossene Komplement bezüglich der $\mathfrak{S}^3$ des von E berandeten 3-Simplexes eine Kugel, die von $\mathfrak{h}$ in zwei Kugeln zerlegt wird. Eine dieser beiden Kugeln, sie heiße $\mathfrak{K}$, wird von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ berandet. Der erwünschte Fall liegt vor, wenn $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{E}^3$ liegt. Der andere Fall läßt sich darauf zurückführen. Dies geschieht wie oben, wobei nur Z durch das Komplement von $\mathfrak{E}^3$ bezüglich der $\mathfrak{S}^3$ zu ersetzen ist und E_0 ein Schartetraeder sein muß, das E_2 umfaßt.

In jedem Falle ist erreicht, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ zusammen eine auf $\mathfrak{E}^3$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$ beranden, die Z nicht enthält. Wir wollen $\mathfrak{K}$ als das *Innere der Haube* $\mathfrak{h}$ bezeichnen. Auf $\mathfrak{K}$ läßt sich Hilfssatz 2 anwenden, so daß im weiteren angenommen werden kann, daß $\mathfrak{K}$ im Inneren eines Projektionskegels $\mathfrak{P}$ von Z nach einer Tetraederseite liegt. Zur Vereinfachung der Sprechweise nennen wir die auf $\mathfrak{P}$ liegenden Tetraederseiten waagerecht. Wir können nun von Punkten sprechen, die auf $\mathfrak{P}$ oberhalb bzw. unterhalb einer solchen waagerechten Tetraederseite liegen. Dabei sei die Bezeichnung so gewählt, daß Z der höchste Punkt von $\mathfrak{P}$ ist.

Dritter Schritt. *Normierung der Haube* $\mathfrak{h}$.

Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir weiterhin an, daß $\mathfrak{h}$ eine innere Haube von $\mathfrak{T}_k$ ist. $\mathfrak{h}$ schneidet dann E_1 in einer Schnittlinie u^*, die auf E_1 ein auf $\mathfrak{K}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{f}^*$ berandet. Durch eine zentrische Abbildung, welche die von Z ausgehenden Halbgeraden permutiert und $\mathfrak{P}$ auf sich abbildet, läßt sich erreichen, daß $\mathfrak{f}^*$ ein 2-Simplex ist. $\mathfrak{f}$ entstehe aus $\mathfrak{f}^*$ dadurch, daß man $\mathfrak{f}^*$ ähnlich auf seinen Mittelpunkt zusammenzieht und werde so gewählt, daß der Kreisring, der das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{f}$ bezüglich $\mathfrak{f}^*$ ausmacht, mit $\mathfrak{T}_k$ nur den Rand u^* gemein hat und zu den übrigen Tori und zu k punktfremd ist. Der Rand von $\mathfrak{f}$ sei u. S sei ein Punkt, der im Inneren von $\mathfrak{P}$ über dem Mittelpunkt von $\mathfrak{f}$ liegt. Fig. 7 zeigt den Sachverhalt im Schnitt. Wir betrachten den Kegelmantel, der von den Projektionsstrahlen von S nach den Punkten von u gebildet wird. Ist E_1' ein Schartetraeder, das E_1 umfaßt und hinreichend nahe an E_1 gewählt wird,

so wird E_1' von diesem Kegelmantel in einer Schnittlinie v geschnitten, die zusammen mit der Schnittlinie von E_1' und $\mathfrak{h}$ auf E_1' einen auf $\mathfrak{K}$ liegenden Kreisring berandet, der mit $\mathfrak{T}_h$ nur den auf $\mathfrak{h}$ liegenden Rand gemein hat und der zu den übrigen Tori und zu k punktfremd ist. Auf E_1' berandet v ein auf $\mathfrak{K}$ liegendes 2-Simplex $\mathfrak{g}$. Das 3-Simplex, das $\mathfrak{g}$ zur Seite und S zur gegenüberliegenden Ecke hat, nennen wir $\mathfrak{L}_1$. Sein Rand wird durch u und v in $\mathfrak{g}$, einen Kreisring $\mathfrak{r}$ und ein Elementarflächenstück $\mathfrak{d}$ zerlegt. $\mathfrak{r}$ ist punktfremd zu den Tori $\mathfrak{T}_i$ und zu k, wenn E_1' hinreichend nahe an E_1 gewählt ist, was der Fall sein soll.

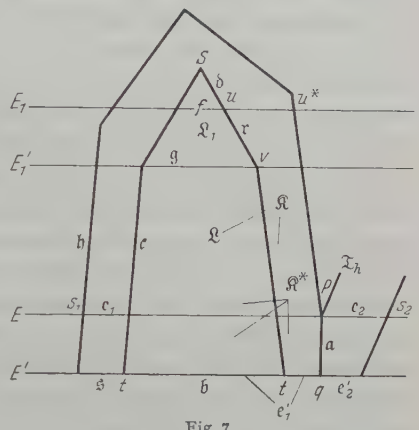


Fig. 7.

$\mathfrak{d}$ wird möglicherweise von den Tori $\mathfrak{T}_i$ getroffen. Durch waagerechtes Verschieben der oberhalb E_1 auf $\mathfrak{P}$ liegenden Ecken einer simplizialen Zerlegung der Tori $\mathfrak{T}_i$ läßt sich erreichen, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{d}$ mit den Tori $\mathfrak{T}_i$, falls er nicht bereits leer ist, nur aus doppelpunktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die paarweise und zu u punktfremd sind. Jede solche Schnittlinie ist nullhomolog auf ihrem Torus und berandet auf diesem ein Elementarflächenstück, das innerhalb E_1 liegt. Da nämlich innerhalb E_1 keine Ausnahmeecken der Tori liegen, besteht der Durchschnitt des von E_1 berandeten 3-Simplexes mit den Tori nur aus Elementarflächenstücken[5]), und jede Schnittlinie von $\mathfrak{d}$ mit einem Torus liegt auf einem solchen Elementarflächenstück. Eine auf $\mathfrak{d}$ innerste Schnittlinie mit einem Torus $\mathfrak{T}_j$ kann daher[6]) durch eine s-Abbildung beseitigt werden, welche $\mathfrak{T}_j$ geeignet deformiert, während sie auf den übrigen Tori und außerhalb E_1, also auch auf k, die Identität ist, und es lassen sich so der Reihe nach alle Schnittlinien von $\mathfrak{d}$ mit den Tori beseitigen. Dies kann zudem so geschehen, daß die Schar (E) zulässig in bezug auf die Tori bleibt und daß $\mathfrak{h}$ innerhalb $\mathfrak{P}$ verbleibt. Es liegt dann $\mathfrak{d}$ im Inneren von $\mathfrak{K}$, da dies für den Rand u der Fall ist. Möglicherweise sind hierbei neue Ausnahmeecken der Tori innerhalb E_1 entstanden. Diese stören jedoch die folgenden Schritte nicht und können danach wie im ersten Schritt wieder beseitigt werden. Die Normierung von $\mathfrak{h}$ ist damit beendet.

Vierter Schritt. *Einziehen der im Inneren von $\mathfrak{h}$ liegenden Teile.*

Wenn man den Sattel betrachtet, der von $\mathfrak{T}_h$ in der Umgebung der Ausnahmeecke P gebildet wird, so bemerkt man, daß es ein „aufrecht stehendes" 2-Simplex $\mathfrak{a}$ gibt, das an die beiden Satteltäler mit je einer Kante anstößt und dessen dritte Kante q waagerecht ist. P ist Ecke und der höchste Punkt

[5]) Vgl. die Definition der Hauben.
[6]) Vgl. den ersten Schritt.

von $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ kann offenbar so gewählt werden, daß der Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_h$ nur aus den beiden von P ausgehenden Kanten besteht und daß $\mathfrak{a}$ zu den übrigen Tori und zu k punktfremd ist. Wenn $\mathfrak{a}$ hinreichend klein gewählt ist, so liegen auf dem Schartetraeder E' durch q und zwischen E' und dem Schartetraeder E durch P keine Punkte von $\mathfrak{T}_h$, deren Ordnung von Null verschieden ist.

Auf E' liegt eine Schnittlinie mit $\mathfrak{T}_h$, die durch Vereinigung von s_1 und s_2 entsteht, wenn man E in E' dehnt, und diese berandet auf E' ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$, das durch q in zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ zerlegt wird, die $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ bei der Dehnung von E in E' entsprechen (Fig. 7). $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{a}$ und ein Elementarflächenstück auf $\mathfrak{T}_h$, das $\mathfrak{h}$ umfaßt, beranden eine Kugel $\mathfrak{K}^*$, welche die von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ berandete Kugel $\mathfrak{K}$ umfaßt. Man kann sagen, daß $\mathfrak{K}^*$ aus $\mathfrak{K}$ durch „Verlängerung" von $\mathfrak{h}$ entsteht.

Wir verlängern nun den innerhalb $\mathfrak{h}$ liegenden Pyramidenmantel $\mathfrak{d}+\mathfrak{r}$ zu einem Elementarflächenstück $\mathfrak{c}$, dessen Rand t auf $\mathfrak{e}_1'$ im Inneren von $\mathfrak{e}_1'$ liegt, das zu den Tori $\mathfrak{T}_i$ und zu k punktfremd ist und das von jedem Schartetraeder zwischen E_1' und E' in nur einer Schnittlinie getroffen wird, also keine Ausnahmeecke besitzt. Daß dies möglich ist, erkennt man ohne weiteres, wenn man E_1' stetig in E' dehnt. $\mathfrak{e}_1'$ wird durch t in ein Elementarflächenstück $\mathfrak{b}$ und einen Kreisring $\mathfrak{s}$ zerlegt. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ beranden zusammen eine auf $\mathfrak{K}^*$ liegende Kugel $\mathfrak{L}$, welche $\mathfrak{L}_1$ umfaßt und die im Inneren von $\mathfrak{h}$ liegenden Teile der Tori $\mathfrak{T}_i$ und der Knotenlinie k enthält, wenn $\mathfrak{c}$ geeignet, d.h. hinreichend nahe an $\mathfrak{T}_h$, gewählt ist, was der Fall sein soll.

Durch eine orientierungserhaltende Ähnlichkeitsabbildung φ bilden wir nun $\mathfrak{L}$ so ab, daß das Bild von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{K}^*$ und unterhalb E liegt und daß $\mathfrak{b}$ auf ein Elementarflächenstück auf $\mathfrak{e}_1'$ abgebildet wird. φ kann so gewählt werden, daß das abgeschlossene Komplement von $\varphi(\mathfrak{L})$ bezüglich $\mathfrak{K}^*$ eine Kugel ist, wobei $\varphi(t)$ punktfremd zum Rande von $\mathfrak{e}_1'$ ist. Wir setzen φ auf den Kreisring $\mathfrak{s}$ so fort, daß φ auf dem Rande von $\mathfrak{e}_1'$ die Identität ist. Dies ist möglich[7]), da $\mathfrak{b}$ als Elementarflächenstück in $\mathfrak{e}_1'$ orientierungserhaltend abgebildet wird. Damit ist φ auf $\mathfrak{e}_1'$ definiert. Auf dem restlichen Teil des Randes von $\mathfrak{K}^*$ definieren wir φ durch die Identität. Nun ist φ auf dem Rande der Kugel definiert, die das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}^*$ ausmacht, und kann auf diese Kugel fortgesetzt werden. Auf dem Komplement von $\mathfrak{K}^*$ bezüglich des von E' berandeten 3-Simplexes setzen wir φ durch die Identität fort, und außerhalb E' läßt sich schließlich φ so definieren, daß φ dort eine zentrische Abbildung ist. Die Bilder bezüglich φ bezeichnen wir ebenso wie die Urbilder. Bei der Abbildung φ ist die Schar (E) zulässig in bezug auf die Tori $\mathfrak{T}_i$ geblieben, und es ist jeder Punkt der Tori $\mathfrak{T}_i$ in einen von gleicher Ordnung bezüglich (E) übergegangen, nur ist k nicht mehr eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art. Um dies wieder zu erreichen, schieben wir den von $\mathfrak{L}_1$ gebildeten Oberteil von $\mathfrak{L}$ im nächsten Schritt geeignet aus.

[7]) Vgl. KV § 1, Satz 1b und § 2, Hilfssatz 1.

Fünfter Schritt. *Ausschieben der eingezogenen Teile.*

Die „Spitze" S von $\mathfrak{L}$ verbinden wir durch einen zentrisch monotonen Streckenzug h mit einem Punkte von E_1. Das soll so geschehen, daß h zunächst unterhalb E durch das „aufrecht stehende" 2-Simplex $\mathfrak{a}$ und dann durch $\mathfrak{e}_2$ geführt wird und daß h punktfremd zu $\mathfrak{h}$ und damit $\mathfrak{K}$ bleibt. Offenbar kann h punktfremd zu k gewählt werden. Jedoch läßt es sich möglicherweise nicht vermeiden, daß h die Tori $\mathfrak{T}_i$ schneidet. Wenn man das Schartetraeder durch S stetig auf E_1 zusammenzieht, bemerkt man aber, daß man h so führen kann, daß jeder Schnittpunkt von h mit einem Torus ein Punkt der Ordnung -1 ist, also ein Punkt, der isoliert ist im Durchschnitt des betreffenden Schartetraeders mit den Tori, und zwar ein solcher, in welchem eine Schnittlinie von Schartetraeder und Torus beim Zusammenziehen des Tetraeders verschwindet (Minimum der zentrischen Distanz). Mit anderen Worten: Man wähle h so, daß man beim Zusammenziehen des Schartetraeders durch S auf E_1 der Knotenlinie k ausweicht und den Schnittlinien mit den Tori, solange es irgend möglich ist.

Offenbar gibt es einen von Z ausgehenden Projektionsstrahl außerhalb $\mathfrak{P}$, der h nicht trifft. Wie sich aus dem Beweise von Hilfssatz 2 ergibt, kann man durch eine zentrische Abbildung erreichen, daß $\mathfrak{L}$ und h im Inneren des Durchschnittes des Projektionskegels $\mathfrak{P}$ mit einem senkrechten Zylinder $\mathfrak{Z}$ liegen, und die Abbildung kann so gewählt werden, daß $\mathfrak{P}$ affin in sich und damit auch $\mathfrak{L}$ affin abgebildet wird. Nach Hilfssatz 1 läßt sich nun durch eine s-Abbildung des R^3, welche jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt, erreichen, daß h eine senkrechte Strecke ist, und die Abbildung kann so gewählt werden, daß sie unterhalb der waagerechten Ebene durch S und außerhalb $\mathfrak{Z}$ die Identität ist. Wenn man diese Abbildung auf $\mathfrak{Z}$ oberhalb der waagrechten Seite von E_1 geeignet ändert, erhält man eine zentrische Abbildung. Wir können also weiterhin annehmen, daß h eine senkrechte Strecke ist. Die vorangehende Konstruktion hat bewirkt, daß $\mathfrak{L}$ unter P hinweggeschoben ist.

Wir betrachten nun den höchsten Schnittpunkt Q von h mit den Tori. Q liege etwa auf $\mathfrak{T}_j$. Auf der Verlängerung von h über den oberen Endpunkt hinaus wählen wir einen Punkt Q' innerhalb $\mathfrak{P}$ derart, daß die Verbindungsstrecke von Q' zum oberen Endpunkt von h punktfremd zu allen Tori ist. Wenn wir $\mathfrak{T}_j$ mit einer Ebene hinreichend dicht unterhalb Q schneiden, so schneidet diese von $\mathfrak{T}_j$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$ ab, das den Punkt Q enthält und das aus dem Kegel der Projektionsstrahlen von Q' nach den Punkten von $\mathfrak{n}$ eine Kugel $\mathfrak{N}$ abschneidet, die punktfremd zu k und den von $\mathfrak{T}_j$ verschiedenen Tori ist und deren Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_j$ nur aus $\mathfrak{n}$ besteht. $\mathfrak{N}$ wird berandet von $\mathfrak{n}$ und einem Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$ auf dem Mantel des Projektionskegels von Q' nach $\mathfrak{n}$. Durch eine s-Abbildung, die auf $\mathfrak{T}_j - \mathfrak{n}$ und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{N}$, insbesondere auf k und den von $\mathfrak{T}_j$ verschiedenen Tori, die Identität ist, läßt sich $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{m}$ überführen. Der Schnittpunkt Q von h mit $\mathfrak{T}_j$ ist damit verschwunden, und es sind keine neuen Ausnahmeecken entstanden. Das Verfahren kann so oft wiederholt werden, bis alle Schnittpunkte von h mit den Tori $\mathfrak{T}_j$ beseitigt sind.

Nunmehr kann $\mathfrak{L}$ ausgeschoben werden. Wir wählen den Punkt S' auf der Verlängerung von h über den oberen Endpunkt hinaus so, daß die Strecke SS' punktfremd zu allen Tori ist und innerhalb $\mathfrak{P}$ liegt. Bringen wir das auf dem Rande von $\mathfrak{L}$ liegende Elementarflächenstück $\mathfrak{d}$ mit einer waagerechten Ebene dicht unterhalb S zum Schnitt, so schneidet diese ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$ so von $\mathfrak{d}$ ab, daß $\mathfrak{n}$ von dem Kegel der Projektionsstrahlen von S' nach den Punkten von $\mathfrak{n}$ eine Kugel $\mathfrak{N}$ abschneidet, die punktfremd zu k und allen Tori ist. $\mathfrak{N}$ setzt sich mit $\mathfrak{L}_1$ zu einer Kugel $\mathfrak{M}$ zusammen, welche die Gestalt einer „Pyramide mit eingeknickten Seiten" hat. Offenbar läßt sich nun $\mathfrak{L}_1$ durch eine Abbildung σ semilinear so auf $\mathfrak{M}$ abbilden, daß σ auf dem „Boden" $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{L}_1$ die Identität ist, daß das Bild von $\mathfrak{f}$ auf E_1 liegt ($\mathfrak{f}$ lag auf E_1 vor dem vierten Schritt), und daß Punkte, die in $\mathfrak{L}_1$ auf gleicher Höhe liegen, in Punkte gleicher Höhe übergehen. σ läßt sich außerhalb $\mathfrak{L}_1$ so fortsetzen, daß σ auf den außerhalb $\mathfrak{L}_1$ liegenden Teilen der Tori $\mathfrak{T}_i$ und der Knotenlinie k die Identität ist. Man kann nämlich zunächst eine „Pyramide mit eingeknickten Seiten" $\mathfrak{M}'$ wählen, deren Spitze wenig oberhalb S' auf der Verlängerung von h liegt, die den gleichen Boden $\mathfrak{g}$ wie $\mathfrak{M}$ hat und für die das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{M}'$ eine zu k und allen Tori punktfremde Kugel ist. Dann ist auch das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{L}_1$ bezüglich $\mathfrak{M}'$ eine Kugel, und man kann auf ihr σ so definieren, daß $\mathfrak{M}'$ durch σ auf sich abgebildet wird und daß σ auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$ die Identität ist, so daß σ im Komplement von $\mathfrak{M}'$ durch die Identität definiert werden kann. Nunmehr ist k wieder eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art, und die Brückenzahl ist dieselbe wie ursprünglich. Wenn die Ähnlichkeitsabbildung für $\mathfrak{L}$ im vierten Schritt und die hier benutzte Abbildung σ geeignet gewählt sind, so liegen für die Tori $\mathfrak{T}_i$ auch jetzt keine zwei Punkte mit von Null verschiedener Ordnung auf demselben Schartetraeder.

Durch das Vorangehende ist erreicht, daß für die Haube das von der Grenzlinie s_1 auf E berandete Elementarflächenstück $\mathfrak{c}_1$ punktfremd zu k ist. Die Ausnahmeecke P kann daher wie im ersten Schritt beseitigt werden. Falls durch den dritten Schritt Ausnahmeecken innerhalb E_1 entstanden sind, so liegen sie auch jetzt wieder innerhalb E_1 und können ebenfalls nach dem ersten Schritt beseitigt werden, so daß die Anzahl der Ausnahmeecken aller Tori tatsächlich um 1 abgenommen hat. Wir wiederholen dieses Verfahren für alle Tori solange, bis keine Haube mehr vorhanden ist.

§ 6. Beseitigung von Einstülpungen.

Betrachten wir nun für einen der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa für $\mathfrak{T}_h$, alle diejenigen Schnittlinien mit Schartetraedern, die durch eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_h$ gehen, so bilden diese Paare mit je einem gemeinsamen Punkt, und verschiedene solche Paare sind zueinander punktfremd. Dies folgt daraus, daß jede Ausnahmeecke die Ordnung 1 hat und daß auf keinem Schartetraeder zwei Ausnahmeecken liegen. Unter den betrachteten Schnittlinien kann keine nullhomolog auf $\mathfrak{T}_h$ sein. Es gäbe sonst nämlich auf $\mathfrak{T}_h$ eine innerste, die auf $\mathfrak{T}_h$

ein von weiteren solchen Schnittlinien freies Elementarflächenstück berandete, und dieses müßte eine Haube von $\mathfrak{T}_h$ sein, was nach § 5 nicht mehr möglich ist. Die betrachteten Schnittlinien sind also Meridiane von $\mathfrak{V}_h$, und es sind solche tatsächlich vorhanden, da eine geschlossene Fläche ohne Ausnahmeecke eine 2-Sphäre ist[1]). $\mathfrak{T}_h$ wird durch die betrachteten Schnittlinienpaare in Zweiecke und Kreisringe zerlegt. Dies bedeutet, daß $\mathfrak{T}_h$ bezüglich der Schar (E) nur aus Knien und Schenkeln besteht. Dabei stößt jedes Knie an zwei Schenkel und jeder Schenkel an zwei Knie an.

Wir können weiterhin annehmen, daß jedes innere Knie der Tori $\mathfrak{T}_i$ das innere Grenztetraeder E_1 von k schneidet und daß E_2 von jedem äußeren Knie geschnitten wird. Falls dies noch nicht der Fall ist, läßt sich dies vermöge der Konstruktion des fünften Schrittes von § 5 erreichen.

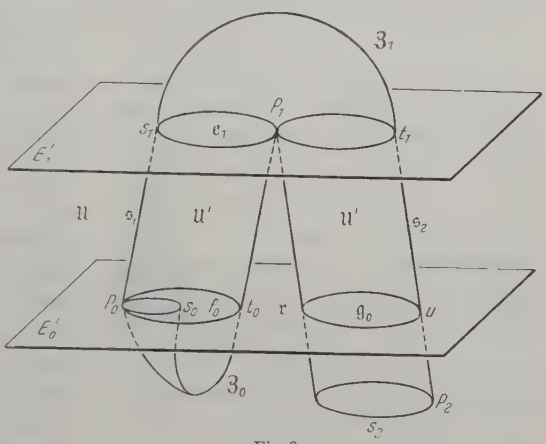


Fig. 8.

Wir betrachten nun einen Schenkel $\mathfrak{s}_1$ von $\mathfrak{T}_h$. In seinen Grenzlinien t_0, s_1 stößt je ein Knie $\mathfrak{z}_0$ bzw. $\mathfrak{z}_1$ von $\mathfrak{T}_h$ an. Das Schartetraeder durch t_0 sei E_0', dasjenige durch s_1 sei E_1'. Auf t_0 und s_1 liegt je eine Ausnahmeecke P_0 bzw. P_1. Durch P_0 geht außer t_0 die zweite Grenzlinie s_0 von $\mathfrak{z}_0$, durch P_1 geht außer s_1 die zweite Grenzlinie t_1 von $\mathfrak{z}_1$. s_1 berandet auf E_1' ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$, das t_1 nicht enthält. $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{s}_1$ bilden zusammen ein Elementarflächenstück, das zusammen mit einem von t_0 auf E_0' berandeten Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_0$ eine zwischen E_1' und E_0' liegende Kugel berandet. Es kann nun eintreten, daß s_0 auf $\mathfrak{f}_0$ liegt (Fig. 8). Wenn dies der Fall ist, so wollen wir sagen, daß $\mathfrak{s}_1$ zusammen mit den beiden anstoßenden Knien $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_1$ eine *Einstülpung* von $\mathfrak{T}_h$ bildet. Der Sachverhalt läßt sich auch so ausdrücken: Von E_0' und E_1' wird eine Kugelschale berandet, die durch $\mathfrak{s}_1$ in zwei Kugeln zerlegt wird. Liegen dann s_0, t_1 auf dem Rande derselben Kugel, so läßt sich die andere als das Innere von $\mathfrak{s}_1$ auffassen. Eine Einstülpung liegt vor, wenn eine solche Festlegung des Inneren nicht möglich ist.

Wir werden zeigen, daß sich alle Einstülpungen dadurch beseitigen lassen, daß man sie in zwei Hauben verwandelt. Dies geschieht so, daß man $\mathfrak{T}_h$ längs eines geeigneten Elementarflächenstückes so einbeult, daß (bei geeigneter Bezeichnungsweise) P_1 auf $\mathfrak{z}_0$ zu liegen kommt. Dabei wird eine Fallunterscheidung erforderlich, die von der Lage der zu P_1 benachbarten Ausnahmeecken auf $\mathfrak{T}_h$ abhängt.

[1]) KV § 4, Satz 1. Es wird dort zwar eine Schar paralleler Ebenen statt einer Tetraederschar zugrunde gelegt, der Beweis überträgt sich jedoch ohne weiteres.

$\mathfrak{z}_0, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1$ mögen im folgenden stets eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$ darstellen. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir dabei an, daß $\mathfrak{z}_1$ ein inneres Knie ist. In t_1 stößt ein Schenkel $\mathfrak{s}_2$ von $\mathfrak{T}_h$ an. Auf seiner zweiten Grenzlinie s_2 liegt eine Ausnahmeecke P_2 von $\mathfrak{T}_h$. Da P_0 und P_2 verschiedene zentrische Distanz haben, liegt P_2 entweder außerhalb E_0' oder zwischen E_1' und E_0'. Wir unterscheiden diese beiden Fälle als erste und zweite Lage des anstoßenden Schenkels $\mathfrak{s}_2$.

Erster Schritt. *Beseitigung einer Einstülpung, für welche ein anstoßender Schenkel in erster Lage ist, im einfachsten Falle.*

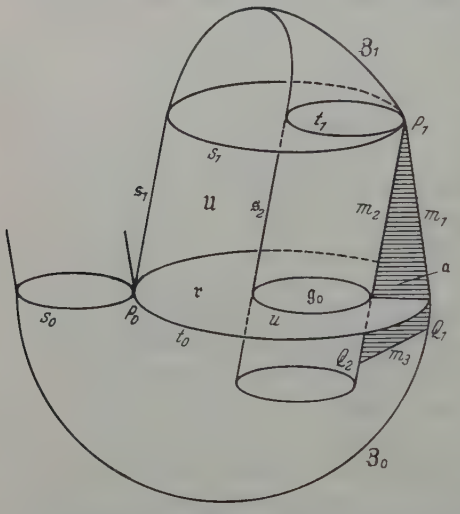


Fig. 9.

Der Schenkel $\mathfrak{s}_2$ sei in erster Lage zur betrachteten Einstülpung. Dann wird $\mathfrak{s}_2$ von E_0' in einer Schnittlinie u geschnitten. u liegt nicht auf $\mathfrak{f}_0$ (Fig. 8). Dehnt man nämlich E_1' in E_0', so entsteht t_0 aus s_1, u aus t_1 und $\mathfrak{f}_0$ aus $\mathfrak{e}_1$. Da t_1 nicht auf $\mathfrak{e}_1$ liegt, kann u nicht auf $\mathfrak{f}_0$ liegen. u und t_0 zerlegen daher E_0' in $\mathfrak{f}_0$, ein von u berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_0$ und einen Kreisring $\mathfrak{r}$. Auf $\mathfrak{T}_h$ beranden t_0 und u einen Kreisring $\mathfrak{s}$, der sich aus $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1$ und einem Kreisring auf $\mathfrak{s}_2$ zusammensetzt. $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ bilden zusammen einen Torus, der in der $\mathfrak{S}^3$ einen Vollring $\mathfrak{U}'$ berandet, für welchen $\mathfrak{f}_0$ und $\mathfrak{g}_0$ Meridianflächen sind. Aus einem Querschnitt von $\mathfrak{r}$, der von t_0 nach u führt, und zwei zentrisch monotonen Streckenzügen, die von den Endpunkten des Querschnittes auf $\mathfrak{s}_1$ bzw. $\mathfrak{s}_2$ nach P_1 führen, erhält man eine Kreislinie[2]) auf dem Rande von $\mathfrak{U}'$, welche die Meridiane t_0, u in genau einem Punkte schneidet. Daraus folgt[3]), daß $\mathfrak{U}'$ unverknotet ist und daß das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{U}'$ bezüglich der $\mathfrak{S}^3$ ein unverknoteter Vollring $\mathfrak{U}$ ist. $\mathfrak{U}$ liegt auf dem von E_0' berandeten 3-Simplex. Wir können annehmen, daß das Scharzentrum Z nicht auf $\mathfrak{U}$ liegt. Wenn dies noch nicht der Fall ist, können wir es dadurch erreichen, daß wir $\mathfrak{z}_1$ so über Z hinwegschlagen, wie dies im zweiten Schritt von § 5 für eine Haube ausgeführt wurde. Nun kann man Z mit einem Punkte von $\mathfrak{f}_0$ durch einen zentrisch monotonen Streckenzug auf $\mathfrak{U}'$ verbinden und wegen Hilfssatz 2 durch eine zentrische Abbildung erreichen, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{g}_0$ innerhalb des Projektionskegels $\mathfrak{P}$ von Z nach den „waagerechten" Tetraederseiten liegen. Dabei wird wieder angenommen, daß Z der höchste Punkt von $\mathfrak{P}$ ist. Die in Fig. 8 gegebene Darstellung ist jetzt durch die von Fig. 9

[2]) Man erhält daraus leicht eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit nur einer Brücke.

[3]) KV § 6, Hilfssatz 3 und § 7, Satz 2.

zu ersetzen. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{g}_0$ sollen weiterhin diese Lage haben, so daß wir unsere Betrachtungen innerhalb $\mathfrak{P}$ durchführen können.

Wir betrachten nun zunächst den einfachsten Fall, daß auf $\mathfrak{r}$ außer den Rändern t_0, u keine Schnitte von E_0' mit den Tori $\mathfrak{T}_i$ liegen. Der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{T}_h$ besteht dann nur aus dem Kreisring $\mathfrak{s}$, denn es stößt $\mathfrak{T}_h - \mathfrak{s}$ in t_0 und u von außen an $\mathfrak{U}$ an, und der Rand von $\mathfrak{U}$ ist punktfremd zu den von $\mathfrak{T}_h$ verschiedenen Tori. Keiner dieser Tori kann auf $\mathfrak{U}$ liegen, da jedes äußere Knie das außerhalb E_0' liegende Schartetraeder E_2 trifft und $\mathfrak{U}$ innerhalb E_0' liegt.

Wenn man nun das durch P_1 gehende Schartetraeder E_1' stetig dehnt, so bemerkt man, daß es ein „aufrecht stehendes" Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1. Der Rand von $\mathfrak{a}$ besteht aus drei monotonen Streckenzügen m_1, m_2, m_3. Dabei führt m_1 von P_1 zunächst auf $\mathfrak{s}_1$ zu einem von P_0 verschiedenen Punkte auf t_0 und noch etwas weiter auf $\mathfrak{z}_0$ zu einem Punkte Q_1. m_2 führt von P_1 auf $\mathfrak{s}_2$ zu einem Punkte Q_2, der noch etwas tiefer als Q_1 liegt, und m_3 führt schließlich von Q_1 nach Q_2.

2. Der Durchschnitt von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{T}_h$ besteht aus $m_1 + m_2$. Die übrigen Tori und k werden von $\mathfrak{a}$ nicht getroffen.

3. $\mathfrak{a}$ wird von jedem Schartetraeder zwischen E_1' und dem Schartetraeder durch Q_2 in nur einem Querschnitt getroffen.

Man kann beispielsweise $\mathfrak{a}$ so wählen, daß $\mathfrak{a}$ zwischen E_1' und E_0' aus 2-Simplexen besteht, die je eine waagerechte Kante haben, und daß $\mathfrak{a}$ unterhalb E_0' senkrecht ist. Die Wahl von $\mathfrak{a}$ könnte mißlingen, wenn s_0 auf $\mathfrak{r}$ statt auf $\mathfrak{f}_0$ läge, also keine Einstülpung vorhanden wäre: Beim Versuche, $\mathfrak{a}$ in der angegebenen Weise zu bestimmen, „bleibt $\mathfrak{a}$ an dem von $\mathfrak{T}_h$ in P_0 gebildeten Sattel hängen".

Beiderseits $\mathfrak{a}$ lassen sich zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ so wählen, daß $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ mit $\mathfrak{a}$ das Randstück m_3 gemein haben, während der restliche Randbogen $m_{11} + m_{12}$ bzw. $m_{21} + m_{22}$ aus zwei von Q_1 und Q_2 ausgehenden monotonen Streckenzügen auf $\mathfrak{T}_h$ besteht, die sich wenig oberhalb P_1 auf $\mathfrak{z}_1$ treffen. Da $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{a}$ liegen sollen, gehen $m_{11} + m_{12}$ und $m_{21} + m_{22}$ nicht über denselben Hang des Sattels von $\mathfrak{T}_h$ in P_1. Wählt man $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ hinreichend dicht an $\mathfrak{a}$, so sind sie zu k und den von $\mathfrak{T}_h$ verschiedenen Tori punktfremd, und man kann $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ außerdem noch so bestimmen, daß ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_h$ nur aus $m_{11} + m_{12}$ bzw. $m_{21} + m_{22}$ besteht und daß sie von jeder waagerechten Ebene zwischen ihrem höchsten und tiefsten Punkt nur in je einem Querschnitt getroffen werden.

Die auf $\mathfrak{T}_h$ liegenden Randstücke von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beranden zusammen auf $\mathfrak{T}_h$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{a}_3$, das P_1 enthält und zusammen mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ eine auf $\mathfrak{U}$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$ berandet. $\mathfrak{K}$ ist punktfremd zu k und den von $\mathfrak{T}_h$ verschiedenen Tori, und der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{T}_h$ besteht aus $\mathfrak{a}_3$. Es gibt daher eine s-Abbildung, die $\mathfrak{a}_3$ in $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ überführt und die auf $\mathfrak{T}_h - \mathfrak{a}_3$, auf k und auf den von $\mathfrak{T}_h$ verschiedenen Tori die Identität ist. Dann wird Q_1 eine Ausnahmeecke der Ordnung 1 von $\mathfrak{T}_h$, während die Ausnahmeecke P_1

verschwunden ist und keine weiteren Ausnahmeecken entstanden sind. Wir wollen sagen, daß wir die *Ausnahmeecke* P_1 *durch Einbeulen von* $\mathfrak{T}_h$ *längs* $\mathfrak{a}$ *nach* Q_1 *verschoben haben.*

Durch diesen Vorgang ist aus dem Kreisring $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{T}_h$ eine innere Haube entstanden, auf deren Grenzlinie die Ausnahmeecke P_0 liegt. Aus dem Knie $\mathfrak{z}_0$ ist eine äußere Haube entstanden, deren Grenzlinie durch Q_1 geht. Beide Hauben können nach § 5 beseitigt werden, wodurch die Anzahl der Ausnahmeecken von $\mathfrak{T}_h$ um 2 abnimmt.

Zweiter Schritt. *Beseitigung einer beliebigen Einstülpung, für welche ein anstoßender Schenkel in erster Lage ist.*

Die Bezeichnungen seien wie im ersten Schritt, und es mögen wieder $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{g}_0$ in das Innere des Projektionskegels $\mathfrak{P}$ gebracht sein. Auf $\mathfrak{r}$ können jetzt außer den Rändern noch Schnitte von E_0' mit den Tori liegen. Im Inneren von $\mathfrak{U}$ liegen dann möglicherweise Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_i$. In diesem Falle betrachten wir die tiefste von P_0 verschiedene Ausnahmeecke N auf $\mathfrak{U}$. Sie liege etwa auf $\mathfrak{T}_j$. Durch N gehen die beiden Grenzlinien v_1, v_2 eines Knies $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{T}_j$.

Nehmen wir zunächst an, daß $\mathfrak{x}$ ein inneres Knie ist. In diesem Falle schneiden die beiden Schenkel $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ von $\mathfrak{T}_j$, die an $\mathfrak{x}$ anstoßen, E_0' in zwei auf $\mathfrak{r}$ liegenden Schnittlinien. Verschiebt man die waagerechte Ebene durch N parallel zu sich stetig nach unten etwas über die Ebene von $\mathfrak{r}$ hinaus, so bemerkt man, daß man N durch Einbeulen von $\mathfrak{T}_j$ längs eines geeigneten aufrecht stehenden Elementarflächenstückes $\mathfrak{a}$ unterhalb $\mathfrak{r}$ schieben kann. Dies geschieht wie im ersten Schritt. Zwar liegen hier noch Teile der Tori $\mathfrak{T}_i$ auf $\mathfrak{U}$, aber man kann ihnen, ebenso wie k, bei der Wahl von $\mathfrak{a}$ ausweichen. Da nämlich N die tiefste von P_0 verschiedene Ausnahmeecke auf $\mathfrak{U}$ ist, können die beiden Schnittlinien, die beim Verschieben der waagerechten Ebene durch N nach unten auf den Schenkeln $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ entstehen, nicht durch andere Schnittlinien mit den Tori getrennt werden. Mit anderen Worten: Die Wahl von $\mathfrak{a}$ könnte nur daran scheitern, daß $\mathfrak{a}$ in einem Sattel eines Torus hängen bleibt, wenn man $\mathfrak{a}$ von N aus nach unten führen will. Ein solcher Sattel ist aber auf $\mathfrak{U}$ unterhalb N nicht vorhanden, auch in P_0 nicht, da der eine Hang des von $\mathfrak{T}_h$ in P_0 gebildeten Sattels im Komplement von $\mathfrak{U}$ liegt.

Es sei nun $\mathfrak{x}$ ein äußeres Knie. $\mathfrak{x}$ schneidet dann das äußere Grenztetraeder E_2 von k und durchsetzt daher $\mathfrak{r}$ in einer auf $\mathfrak{T}_j$ nullhomologen Schnittlinie. Auch hier ist es möglich, die Ausnahmeecke N durch Einbeulen von $\mathfrak{T}_j$ längs eines aufrecht stehenden Elementarflächenstückes unterhalb $\mathfrak{r}$ zu schieben. Das Einbeulen erfolgt jetzt in das Knie $\mathfrak{x}$ hinein. Dies bereitet jedoch keine Schwierigkeiten. Für das Einbeulen von $\mathfrak{T}_j$ längs $\mathfrak{a}$ ist die Gestalt von $\mathfrak{T}_j$ nur in einer Umgebung des Randes von $\mathfrak{a}$ wesentlich, und für die Wahl von $\mathfrak{a}$ ist nur wesentlich, daß die beiden von der Spitze N ausgehenden Kantenstücke in verschiedenen Tälern eines Sattels von $\mathfrak{T}_j$ liegen. Auch hier ist es möglich, den auf $\mathfrak{U}$ liegenden Teilen der Tori $\mathfrak{T}_i$ auszuweichen, da N die tiefste von P_0 verschiedene Ausnahmeecke auf $\mathfrak{U}$ ist.

Wir bemerken, daß wir so Ausnahmeecken auf $\mathfrak{U}$ der Reihe nach unterhalb $\mathfrak{r}$ schieben können, bis schließlich P_1 die tiefste, von P_0 verschiedene Ausnahmeecke auf $\mathfrak{U}$ ist, und wir können dann P_1 nach dem gleichen Verfahren unterhalb $\mathfrak{r}$ schieben, so daß an Stelle der Einstülpung zwei Hauben von $\mathfrak{T}_h$ entstehen und wieder zwei Ausnahmeecken beseitigt werden können.

Auf diese Weise sollen für die Tori $\mathfrak{T}_i$ alle Einstülpungen beseitigt werden, für welche ein anstoßender Schenkel in erster Lage ist.

Dritter Schritt. *Beseitigung von Einstülpungen, bei welchen die anstoßenden Schenkel in zweiter Lage sind.*

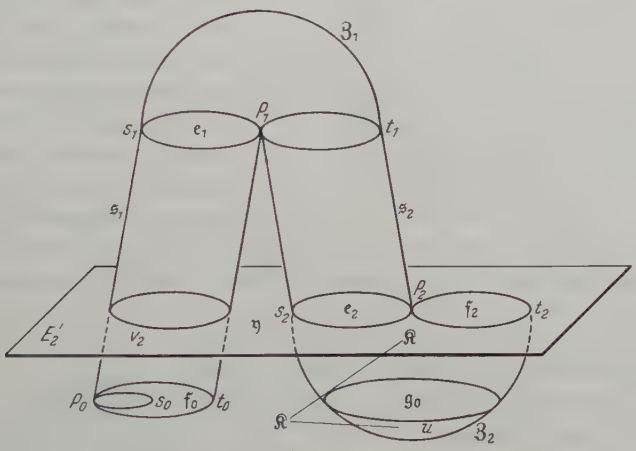


Fig. 10.

Wir behalten die bisherigen Bezeichnungen bei, soweit sie in dem jetzt betrachteten Falle noch eine Bedeutung haben. Die Ausnahmeecke P_2 auf der Grenzlinie s_2 von $\mathfrak{s}_2$ liegt jetzt zwischen E_1' und E_0'. Das Schartetraeder E_2' durch P_2 schneidet daher $\mathfrak{s}_1$ in einer Schnittlinie v_2. In s_2 stößt ein äußeres Knie $\mathfrak{z}_2$ von $\mathfrak{T}_h$ an $\mathfrak{s}_2$ an. Die zweite Grenzlinie von $\mathfrak{z}_2$ sei t_2. s_2 und t_2 zerlegen E_2' in zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_2$ und ein Zweieck $\mathfrak{y}$. Dabei werde $\mathfrak{e}_2$ von s_2 berandet. Für die Lage von v_2 sind 3 Fälle denkbar:

Fall 1. v_2 liegt auf $\mathfrak{y}$ (Fig. 10).
Fall 2. v_2 liegt auf $\mathfrak{e}_2$ (Fig. 11).
Fall 3. v_2 liegt auf $\mathfrak{f}_2$ (Fig. 12).

Fall 1 führen wir durch Deformation auf den zweiten Schritt zurück. Von den beiden anderen Fällen werden wir zeigen, daß sie wegen des zweiten Schrittes nicht mehr möglich sind.

Fall 1. v_2 liegt auf $\mathfrak{y}$.

In diesem Falle (Fig. 10) betrachten wir die von $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{z}_2$ gebildete 2-Sphäre. Sie berandet in der $\mathfrak{E}^3$ eine Kugel $\mathfrak{K}$, die mit dem von E_2' berandeten 3-Simplex nur $\mathfrak{e}_2+\mathfrak{f}_2$ gemein hat. Da v_2 nicht auf $\mathfrak{e}_2+\mathfrak{f}_2$ liegt, ist $\mathfrak{s}_1$ punktfremd zu $\mathfrak{K}$, und es liegt P_0 nicht auf $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}$ schneidet aus E_0' ein Elementar-

flächenstück $\mathfrak{g}_0$ aus, das von $\mathfrak{R}$ eine innerhalb E_0' liegende Kugel $\mathfrak{K}'$ abschneidet. Vermöge $\mathfrak{z}_1$ erkennt man, daß sich Hilfssatz 2 auf $\mathfrak{K}'$ anwenden läßt, so daß angenommen werden kann, daß $\mathfrak{K}'$ im Inneren des Projektionskegels vom Scharzentrum nach den waagerechten Tetraederseiten liegt. Innerhalb $\mathfrak{K}'$ liegen möglicherweise Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_i$. Da aber P_0 nicht auf $\mathfrak{K}'$ liegt, können sie bei festem P_0 der Reihe nach unterhalb $\mathfrak{g}_0$ geschoben werden. Dies geschieht wie im zweiten Schritt, indem man mit der tiefsten Ausnahmeecke in $\mathfrak{K}'$ beginnt. Danach kann auch P_2 unterhalb $\mathfrak{g}_0$ geschoben werden, indem man $\mathfrak{z}_{\partial 2}$ längs eines geeigneten Elementarflächenstückes auf $\mathfrak{K}$ einbeult. Der Schenkel $\mathfrak{s}_2$ ist dann für die Einstülpung $\mathfrak{z}_{\partial 0}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_{\partial 1}$ in erster Lage, und es kann der zweite Schritt angewandt werden.

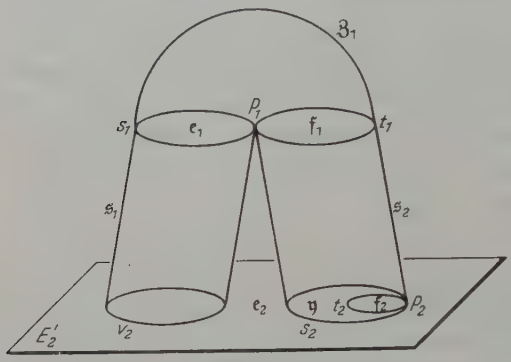


Fig. 11.

Fall 2. v_2 liegt auf $\mathfrak{e}_2$.

Auf E_1' beranden s_1 und t_1 zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1$, die nur den Punkt P_1 gemein haben (Fig. 11). Wenn man E_1' in E_2' dehnt, so entsteht s_2 aus t_1, und aus $\mathfrak{f}_1$ entsteht ein von s_2 auf E_2' berandetes Elementarflächenstück, das v_2 nicht enthält, also im vorliegenden Falle aus $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{y}$ bestehen muß. Dann bilden aber $\mathfrak{z}_{\partial 2}, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{z}_{\partial 1}$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$, für welche der anstoßende Schenkel $\mathfrak{s}_1$ in erster Lage ist (vgl. Fig. 8 und 11). Nach dem zweiten Schritt ist dies nicht mehr möglich.

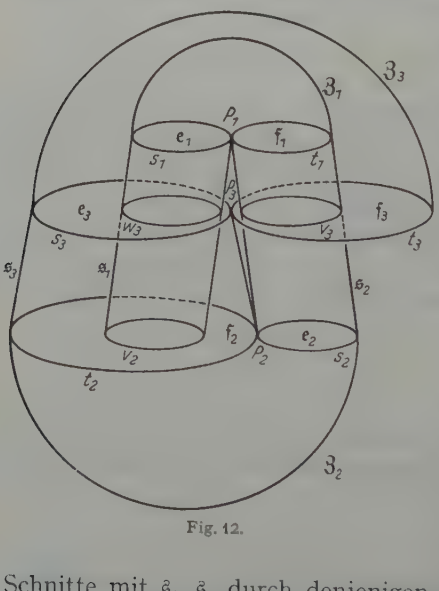


Fig. 12.

Fall 3. v_2 liegt auf $\mathfrak{f}_2$.

In diesem Falle (Fig. 12) betrachten wir den an t_2 anstoßenden Schenkel $\mathfrak{s}_3$ von $\mathfrak{T}_h$. Auf der zweiten Grenzlinie s_3 von $\mathfrak{s}_3$ liegt eine Ausnahmeecke P_3. Zieht man das Schartetraeder E_2' zusammen, so entstehen aus v_2, s_2, t_2 Schnittlinien mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3$, wobei die Schnitte mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ durch denjenigen mit $\mathfrak{s}_3$ getrennt werden. Zieht man E_2' bis auf E_1' zusammen, so vereinigen sich die aus v_2, s_2 entstehenden Schnittlinien in P_1. Da $\mathfrak{T}_h$ singularitätenfrei ist, kann auf E_1' keine Schnittlinie mit $\mathfrak{s}_3$ vorhanden sein, d. h. das Schartetraeder E_3' durch P_3 liegt zwischen E_2' und E_1'.

Beim Zusammenziehen von E_2' auf E_3' entsteht aus $\mathfrak{f}_2$ ein von s_3 auf E_3' berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_3$, das eine Schnittlinie v_3 mit $\mathfrak{s}_1$ besitzt. An s_3 stößt das Knie $\mathfrak{z}_3$ von $\mathfrak{T}_h$ an, dessen zweite Grenzlinie t_3 sei. Läge t_3 auf $\mathfrak{e}_3$, so bildeten $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{z}_2$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$, für welche der anstoßende Schenkel $\mathfrak{s}_2$ in erster Lage ist. Nach dem zweiten Schritt ist dies nicht mehr möglich. s_3 und t_3 zerlegen daher E_3' in $\mathfrak{e}_3$, ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_3$ und ein Zweieck $\mathfrak{y}_3$.

Auf E_3' liegt eine Schnittlinie v_3 mit $\mathfrak{s}_2$. Diese kann nicht auf $\mathfrak{e}_3$ liegen, da s_2 nicht auf $\mathfrak{f}_2$ liegt und v_3, $\mathfrak{e}_3$ aus s_2, $\mathfrak{f}_2$ beim Zusammenziehen von E_2' auf E_3' entstehen. v_3 kann auch nicht auf $\mathfrak{y}_3$ liegen. Es würde sonst $\mathfrak{z}_3$ von dem aus $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{s}_2$ bestehenden Kreisring auf $\mathfrak{T}_h$ durchdrungen, wie man vermöge der von $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{f}_3$ gebildeten 2-Sphäre erkennt. v_3 liegt also auf $\mathfrak{f}_3$.

Für die bisherige Betrachtung des Falles wurde das Knie $\mathfrak{z}_0$ nicht benutzt, also kein Gebrauch davon gemacht, daß $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{z}_1$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$ bilden sollen. Benutzt wurde nur, daß P_0 nicht zwischen E_1' und E_2' liegt. Wir erhalten die Ausgangsfigur, wenn wir $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{s}_1$ weglassen, danach die Indizes um 1 erniedrigen und die Bezeichnungen innen und außen (bezüglich der Schartetraeder) vertauschen. Die gesamte Betrachtung läßt sich daher wiederholen, wenn man die Indizes um 1 erhöht und Zusammenziehungen von Schartetraedern durch Dehnungen ersetzt, und man bemerkt nun, daß sich die Betrachtung beliebig oft wiederholen läßt unter jeweiliger Erhöhung der Indizes um 1. Bei jedem solchen Schritt erhielte man eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_h$, die zwischen den Schartetraedern durch die beiden vorangehenden Ausnahmeecken liegt, woraus folgte, daß auf $\mathfrak{T}_h$ unendlich viele verschiedene Ausnahmeecken liegen, was nicht der Fall ist. Der hier behandelte Fall kann also nicht mehr eintreten.

Wie sich aus dem Vorangehenden ergibt, lassen sich für die Tori $\mathfrak{T}_i$ alle verbliebenen Einstülpungen beseitigen. Danach ist die gewünschte Gestalt der Tori erreicht, was wir im folgenden zeigen werden.

§ 7. Abschluß des Beweises von Hilfssatz 7.

Wir betrachten irgendeinen der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa $\mathfrak{T}_h$. Er besteht nur aus Knien und Schenkeln, wobei jedes innere Knie das Grenztetraeder E_1, jedes äußere Knie das Grenztetraeder E_2 von k schneidet. Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{T}_h$ bezüglich der Schar (E) in Brückenform ist, müssen wir nur noch zeigen, daß für jedes Knie die beiden Grenzlinien auf ihrem Schartetraeder zwei Meridianflächen von $\mathfrak{V}_h$ beranden.

$\mathfrak{T}_h$ besitzt mehr als zwei Schenkel. Anderenfalls bestände $\mathfrak{T}_h$ nur aus zwei Schenkeln und zwei Knien und wäre damit offenbar in Brückenform. Nach Hilfssatz 6 und Satz 1 wäre dann aber $\mathfrak{V}_h$ unverknotet im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es seien $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ Schenkel, $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ Knie von $\mathfrak{T}_h$ (Fig. 13). Dabei habe $\mathfrak{z}_i$ $(i=0, 1, 2)$ mit $\mathfrak{s}_i$ die Grenzlinie s_i, mit $\mathfrak{s}_{i+1}$ die Grenzlinie t_i gemein. Wir sagen, daß die Knie $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_2$ zu $\mathfrak{z}_1$ benachbart sind. Das Schartetraeder durch die Grenzlinien von $\mathfrak{z}_i$ sei E_i'. s_i und t_i beranden auf E_i' zwei

Elementarflächenstücke e_i, f_i, die nur einen Punkt P_i gemein haben. Dehnt man[1]) E_1' in E_0' bzw. E_2', so entsteht f_0 aus e_1 bzw. e_2 aus f_1, da andernfalls $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{z}_2$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$ bildeten.

Es sei jetzt E_1' das innerste Schartetraeder, auf dem eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_h$ liegt. Auf E_1' liegen die Meridiane s_1, t_1 von $\mathfrak{V}_h$, und es liegen auf E_1' keine weiteren Meridiane von $\mathfrak{V}_h$, da ein solcher auf einem von $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ verschiedenen Schenkel von $\mathfrak{T}_h$ liegen müßte, woraus die Existenz einer Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_h$ innerhalb E_1' folgte im Widerspruch zur Annahme. Auf e_1, f_1 liegen möglicherweise noch Schnitte mit Knien von $\mathfrak{T}_h$, also Schnitte, die nullhomolog auf $\mathfrak{T}_h$ sind. Durch Deformation von e_1 und f_1 kann man diese Schnitte beseitigen[2]), wodurch man aus e_1, f_1 Meridianflächen von $\mathfrak{V}_h$ erhält. Es ergibt sich, daß e_1 und f_1 in ihren Rändern vom Inneren des Vollringes $\mathfrak{V}_h$ her an $\mathfrak{T}_h$ anstoßen. Für diesen Sachverhalt wollen wir sagen, daß $\mathfrak{V}_h$ an $\mathfrak{z}_1$ von innen anstößt.

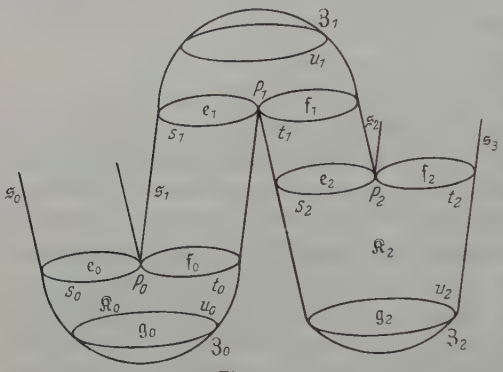


Fig. 13.

Ist jetzt $\mathfrak{z}_1$ ein beliebiges Knie von $\mathfrak{T}_h$, an das $\mathfrak{V}_h$ von innen anstößt, so folgt aus der Tatsache, daß keine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$ vorhanden ist, sofort (Fig. 13), daß $\mathfrak{V}_h$ auch an die zu $\mathfrak{z}_1$ benachbarten Knie von innen anstößt, und es ergibt sich damit, daß $\mathfrak{V}_h$ an alle Knie von $\mathfrak{T}_h$ von innen anstößt.

Es sei nun $\mathfrak{z}_1$ irgendein inneres Knie von $\mathfrak{T}_h$. Die zu $\mathfrak{z}_1$ benachbarten Knie $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_2$ sind dann äußere Knie, und wir bezeichnen sie als benachbarte äußere Knie von $\mathfrak{T}_h$. Es liege E_2' etwa im Inneren von E_0'. E_2' schneidet dann $\mathfrak{s}_1$ in einer Schnittlinie v_2. Diese liegt sicher nicht auf e_2, sie kann auch nicht auf f_2 liegen, weil sich sonst durch die Schlußweise des Falles 3 von § 6 Schritt 3 ergäbe, daß es auf $\mathfrak{T}_h$ unendlich viele verschiedene Ausnahmeecken gibt (Fig. 12). f_0 liegt daher nicht auf der von e_2, f_2 und $\mathfrak{z}_2$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Kugel $\mathfrak{K}_2$, die mit dem von E_2' berandeten 3-Simplex nur $e_2 + f_2$ gemein hat. Das Schartetraeder E_0' schneidet $\mathfrak{z}_2$ in einer Schnittlinie v_0. v_0 liegt sicher nicht auf f_0, wie durch Dehnung von E_1' in E_0' zu erkennen ist. v_0 liegt auch nicht auf e_0. Durch Betrachtung von $\mathfrak{s}_0$ und der weiteren folgenden Knie und Schenkel $\mathfrak{z}_{-1}$, $\mathfrak{s}_{-1}$, $\mathfrak{z}_{-2}$, ... erhielte man nämlich durch eine Schlußweise, die derjenigen des dritten Falles von § 6 Schritt 3 entspricht, daß es unendlich viele Ausnahmeecken auf $\mathfrak{T}_h$ gäbe. Da nun f_0 nicht in $\mathfrak{K}_2$ liegt und $e_0 + f_0$ zum Rande von $\mathfrak{K}_2$ punktfremd ist, ist die Kugel $\mathfrak{K}_0$, die von e_0, f_0 und $\mathfrak{z}_0$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandet wird und die mit dem von E_0' berandeten 3-Simplex nur $e_0 + f_0$ gemein hat, punktfremd zu $\mathfrak{K}_2$. $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_2$ schneiden also aus dem

[1]) Es ist zugelassen, daß der Dehnungsfaktor kleiner als 1 ist.
[2]) KV § 9, Hilfssatz 6.

Grenztetraeder E_2 von k zwei disjunkte Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_2$ aus, die von je einer Schnittlinie u_0 bzw. u_2 von E_2 mit $\mathfrak{z}_0$ bzw. $\mathfrak{z}_2$ berandet werden. $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_2$ stoßen mit ihren Rändern vom Inneren des Vollringes $\mathfrak{V}_k$ her an $\mathfrak{T}_k$ an, denn es entsteht $\mathfrak{g}_0$ bzw. $\mathfrak{g}_2$ aus $\mathfrak{c}_0+\mathfrak{f}_0$ bzw. $\mathfrak{c}_2+\mathfrak{f}_2$, wenn man E_0' bzw. E_2' in E_2 dehnt, und es stößt $\mathfrak{V}_k$ an $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_2$ von innen an.

Es sei nun u_2 eine auf E_2 innerste Schnittlinie von E_2 mit $\mathfrak{T}_k$, d.h. u_2 berandet auf E_2 ein Elementarflächenstück, das außer seinem Rand keine weitere Schnittlinie mit $\mathfrak{T}_k$ enthält. Dieses Elementarflächenstück muß $\mathfrak{g}_2$ sein, da sonst u_0 auf ihm läge. Da nun jedes äußere Knie von E_2 geschnitten wird und auf $\mathfrak{g}_2$ keine Schnitte mit $\mathfrak{T}_k$ liegen, können auch auf $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{f}_2$ keine Schnitte mit $\mathfrak{T}_k$ liegen, d.h. $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{f}_2$ sind Meridianflächen von $\mathfrak{V}_k$. Entsprechend folgt, daß auch $\mathfrak{f}_1$ Meridianfläche von $\mathfrak{V}_k$ ist und daß die zweite Grenzlinie s_3 des Schenkels $\mathfrak{s}_3$ auf ihrem Schartetraeder eine Meridianfläche $\mathfrak{e}_3$ von $\mathfrak{V}_k$ berandet.

Wir sind am Ziele, wenn wir noch zeigen, daß jeder Schnitt von E_2 und $\mathfrak{T}_k$ ein auf E_2 innerster Schnitt ist. Wir betrachten dazu eine Schnittlinie u_{2r} von $\mathfrak{T}_k$ mit E_2, die auf E_2 ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{2r}'$ berandet, das außer seinem Rande noch Schnitte $u_2, u_4, \ldots, u_{2r-2}$ mit $\mathfrak{T}_k$ besitzt, wobei jedoch jeder solcher Schnitt ein auf $\mathfrak{g}_{2r}'$ innerster ist, d.h. auf $\mathfrak{g}_{2r}'$ ein von weiteren Schnitten freies Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{2j}$ $(j=1, 2, \ldots, r-1)$ berandet. Offenbar ist eine solche Schnittlinie u_{2r} stets vorhanden. u_{2r} zerlegt E_2 in $\mathfrak{g}_{2r}'$ und ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{2r}$. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{g}_{2r}$ außer seinem Rande keine Schnittlinie mit $\mathfrak{T}_k$ enthält.

u_{2j} $(j=1, 2, \ldots, r)$ liege auf dem Knie $\mathfrak{z}_{\delta 2j}$ von $\mathfrak{T}_k$. $\mathfrak{g}_{2r}'$ stößt mit seinem Rande von außen an $\mathfrak{V}_k$ an, da $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_4, \ldots, \mathfrak{g}_{2r-2}$ im Inneren von $\mathfrak{V}_k$ liegen. $\mathfrak{g}_{2r}$ stößt also mit seinem Rande vom Inneren des Vollringes $\mathfrak{V}_k$ her an $\mathfrak{T}_k$ an, und die zu $\mathfrak{z}_{2r}$ benachbarten äußeren Knie sind unter den Knien $\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_4, \ldots, \mathfrak{z}_{2r-2}$ vorhanden. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}_{2r-2}$ die zu $\mathfrak{z}_{2r}$ benachbarten äußeren Knie von $\mathfrak{T}_k$ sind. Da u_2 und u_{2r-2} auf E_2 innerste Schnitte von E_2 und $\mathfrak{T}_k$ sind, beranden die Grenzlinien von $\mathfrak{z}_2$ bzw. $\mathfrak{z}_{2r-2}$ auf ihrem Schartetraeder zwei Meridianflächen $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{f}_2$ bzw. $\mathfrak{e}_{2r-2}, \mathfrak{f}_{2r-2}$ von $\mathfrak{V}_k$. $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{f}_{2r-2}$ zerlegen $\mathfrak{V}_k$ in zwei Kugeln, wobei $\mathfrak{K}$ diejenige sei, auf derem Rande $\mathfrak{z}_{2r}$ liegt. $\mathfrak{g}_{2r}$ hat mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ nur seinen Rand u_{2r} gemein und stößt in u_{2r} vom Inneren von $\mathfrak{V}_k$ her an $\mathfrak{T}_k$ an. $\mathfrak{g}_{2r}$ liegt daher ganz auf $\mathfrak{K}$ und damit auf $\mathfrak{V}_k$. u_{2r} ist tatsächlich ein auf E_2 innerster Schnitt von E_2 und $\mathfrak{T}_k$, und es sind nur solche vorhanden. Der Beweis des Hilfssatzes ist damit beendet.

§ 8. Minimale Brückenzahl und Vielfachheit von Begleitknoten.

Wir erinnern zunächst an einige Definitionen. Die Knotenlinie k stelle den Knoten $\varkappa$ dar. $\mathfrak{V}$ sei ein *verknoteter* Vollring, der *k nichttrivial im Inneren* enthält, d.h. so, daß k nicht Seele von $\mathfrak{V}$ ist und nicht in einer auf $\mathfrak{V}$ liegenden Kugel enthalten ist. α sei die *Ordnung* von $\mathfrak{V}$ in bezug auf k, d.h. jede Meridianfläche von $\mathfrak{V}$ trifft k in mindestens α Punkten, und es gibt eine solche, die k in nur α Punkten trifft. $\mathfrak{V}$ stellt dann mit k einen *Begleitknoten λ der*

Ordnung α *von* $\varkappa$ dar, wobei[1]) $\alpha \geqq 1$ ist. Falls k auf $\mathfrak{V}$ nullhomolog ist, ist λ nichtorientiert und wird durch die Seelen von $\mathfrak{V}$ dargestellt. Falls k auf $\mathfrak{V}$ nicht nullhomolog ist, ist λ orientiert und wird durch diejenigen orientierten Seelen von $\mathfrak{V}$ dargestellt, für welche ein positives Vielfaches homolog zu k auf $\mathfrak{V}$ ist. Ein System von Vollringen $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ heißt *bezüglich k nebengeordnet,* wenn jeder dieser Vollringe mit k einen Begleitknoten von $\varkappa$ darstellt und die abgeschlossenen Komplemente der übrigen Vollringe im Inneren enthält.

Satz 2. *Die Knotenlinie k stelle den Knoten* $\varkappa$ *dar.* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *mögen sich als Begleitknoten der Ordnung* α *von* $\varkappa$ *durch ein bezüglich k nebengeordnetes System von Vollringen* $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ *darstellen lassen. Bezeichnet* $b(\lambda_i)$ *bzw.* $b(\varkappa)$ *die minimale Brückenzahl von* λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *bzw.* $\varkappa$, *so gilt:*

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \left(b(\lambda_i) - 1\right) + \alpha \leq b(\varkappa). \tag{1}$$

Beweis. Das Zentrum der Schar konzentrischer Tetraeder (E) des R^3 liege im Inneren von $\mathfrak{E}^3$. Wir können annehmen, daß k eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art bezüglich (E) von $\varkappa$ mit der Brückenzahl $b(\varkappa)$ ist. Wegen Hilfssatz 7 kann angenommen werden, daß die Ränder $\mathfrak{T}_i$ der Vollringe $\mathfrak{V}_i$ in Brückenform bezüglich (E) sind, wobei keine zwei Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_i$ auf demselben Schartetraeder liegen und jedes innere Knie das innere Grenztetraeder E_1 von k trifft.

Der Durchschnitt von E_1 mit einem der Vollringe $\mathfrak{V}_i$, etwa $\mathfrak{V}_h$, besteht aus paarweise disjunkten Elementarflächenstücken, die wir als *bezüglich* $\mathfrak{V}_h$ *innere Elementarflächenstücke* bezeichnen wollen. Sei e ein solches. Das abgeschlossene Komplement von e bezüglich E_1 nennen wir das *zu* e *komplementäre Elementarflächenstück.* Auf ihm liegen alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_h$.

Der Durchschnitt von $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ und E_1 besteht aus paarweise disjunkten Flächenstücken, die einfach oder mehrfach zusammenhängend sind, je nachdem sie einen oder mehrere Ränder besitzen. Wir bezeichnen sie als *innere Flächenstücke.*

Es ist unsere Absicht, die Brücken von k mit Hilfe der inneren Flächenstücke abzuzählen. Dazu benötigen wir die Anzahl γ der inneren Flächenstücke. Bezeichnet β_i die Anzahl der inneren Knie von $\mathfrak{T}_i$, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - 1) + 1 = \gamma. \tag{2}$$

Um zu dieser Gleichung zu gelangen, beweisen wir zunächst durch vollständige Induktion nach n, daß es für ein System von n Vollringen, die bezüglich einer Knotenlinie nebengeordnet sind und deren Ränder die angegebene Brückenform besitzen, stets ein bezüglich eines Vollringes inneres Elementarflächenstück auf E_1 gibt, das alle Schnitte von E_1 mit den Rändern der übrigen Vollringe enthält. Für $n = 1$ ist diese Aussage trivial. Sie gelte

[1]) KV § 9, Satz 1.

für je $n-1$ Vollringe der bezeichneten Lage mit $n-1 \geqq 1$. Betrachten wir nun n solche Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$, wobei $\mathfrak{T}_i$ wieder der Rand von $\mathfrak{V}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sei. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für einen der Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$, etwa für $\mathfrak{V}_1$, ein bezüglich $\mathfrak{V}_1$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$, das alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$ enthält. Liegen auf $\mathfrak{e}_1$ auch alle Schnitte von E_1 und $\mathfrak{T}_n$, so ist nichts zu zeigen. Es gebe nun einen Schnitt von E_1 und $\mathfrak{T}_n$, der nicht auf $\mathfrak{e}_1$ liegt. Da $\mathfrak{T}_n$ im Inneren von $\mathfrak{V}_1$ liegt, muß jeder Schnitt von E_1 und $\mathfrak{T}_n$ auf einem bezüglich $\mathfrak{V}_1$ inneren Flächenstück liegen. Es gibt also ein von $\mathfrak{e}_1$ verschiedenes bezüglich $\mathfrak{V}_1$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_1$, das einen Schnitt mit $\mathfrak{T}_n$ besitzt. Der Rand von $\mathfrak{f}_1$ liegt auf $\mathfrak{T}_1$ und damit im Inneren von $\mathfrak{V}_n$. Er liegt also auf einem bezüglich $\mathfrak{V}_n$ inneren Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n$. $\mathfrak{f}_1$ kann nicht auf $\mathfrak{e}_n$ liegen, da sonst $\mathfrak{f}_1$ nicht von $\mathfrak{T}_n$ geschnitten würde. Also enthält $\mathfrak{e}_n$ das zu $\mathfrak{f}_1$ komplementäre Elementarflächenstück. Auf diesem liegen nun alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_1$ und auch $\mathfrak{e}_1$. Also liegen auf dem bezüglich $\mathfrak{V}_n$ inneren Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n$ alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Wir beweisen nun Gl. (2) für Vollringe der bezeichneten Lage durch vollständige Induktion. Für $n=1$ ist $\beta_1=\gamma$, also Gl. (2) richtig. Gl. (2) gelte nun für je $n-1$ Vollringe der bezeichneten Lage mit $n-1 \geqq 1$. Betrachten wir nun n solche Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$, so gibt es bei geeigneter Numerierung nach dem Vorangehenden ein bezüglich $\mathfrak{V}_n$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n$, das alle Schnitte von E_1 mit den Rändern $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$ der Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ enthält. Das zu $\mathfrak{e}_n$ komplementäre Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n'$ liegt dann auf einem für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ inneren Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$. Es liegt nämlich der Rand von $\mathfrak{e}_n'$ im Inneren von $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$, da dies für $\mathfrak{T}_n$ der Fall ist, und $\mathfrak{e}_n'$ trifft $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$ nicht. Die von $\mathfrak{f}$ verschiedenen für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ inneren Flächenstücke liegen also auf $\mathfrak{e}_n$ und sind innere Flächenstücke für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$. Aus dem für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ inneren Flächenstück $\mathfrak{f}$ entstehen bei Hinzunahme von $\mathfrak{V}_n$ nun β_n für $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ innere Flächenstücke, nämlich $\mathfrak{f}-\mathfrak{e}_n'$ und β_n-1 bezüglich $\mathfrak{V}_n$ innere Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{e}_n'$. Die Anzahl der inneren Flächenstücke erhöht sich also bei Hinzunahme von $\mathfrak{V}_n$ um β_n-1. Gl. (2) ist damit bewiesen.

Nach Hilfssatz 6 ist $b(\lambda_i) \leqq \beta_i$ für $i=1, 2, \ldots, n$, also wegen Gl. (2)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(b(\lambda_i)-1\right)+1 \leqq \gamma.$$

Wir erhalten hieraus Ungleichung (1), wenn wir noch zeigen, daß

$$\alpha\gamma \leqq b(\varkappa) \tag{3}$$

ist. Da k im Inneren aller Vollringe $\mathfrak{V}_i$ liegt, besteht der Durchschnitt einer Brücke k_1 von k mit E_1 aus einem Streckenzug, der auf einem inneren Flächenstück $\mathfrak{f}$ liegt. Wir wollen sagen, daß $\mathfrak{f}$ *die Brücke* k_1 *berührt*. Eine Brücke von k kann nicht von zwei verschiedenen inneren Flächenstücken berührt werden.

Wir erhalten Ungleichung (3), wenn wir zeigen, daß jedes innere Flächenstück mindestens α Brücken von k berührt.

Wir betrachten zunächst ein inneres Flächenstück $\mathfrak{f}$, das einfach zusammenhängend ist. Sein Rand liegt auf einem inneren Knie der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa auf dem Knie $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{T}_h$. Die Grenzlinien von $\mathfrak{z}$ beranden auf ihrem Schartetraeder E zwei Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{V}_h$, und es beranden $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{z}$ eine auf $\mathfrak{V}_h$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$. Dabei ist $\mathfrak{f}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und E_1, da E_1 den Rand von $\mathfrak{K}$ nur im Rande von $\mathfrak{f}$ schneidet und $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{V}_h$ liegt. Der Durchschnitt von k mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ kann nur aus Punkten von $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$ bestehen, da $\mathfrak{z}$ zu k punktfremd ist, und besteht daher aus Schnittpunkten von $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$ mit zentrisch monotonen Streckenzügen von k. Auf $\mathfrak{m}_1$ müssen mindestens α solche Schnittpunkte liegen, ebenso auf $\mathfrak{m}_2$, da $\mathfrak{V}_h$ in bezug auf k die Ordnung α hat. $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$ liegt auf dem Schartetraeder E, kann also mit einem zentrisch monotonen Streckenzug von k höchstens einen Punkt gemein haben. Durch $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$ dringen somit mindestens 2α zentrisch monotone Streckenzüge von k ins Innere von $\mathfrak{K}$ ein, und jeder solche Streckenzug besitzt einen Endpunkt auf $\mathfrak{f}$, da $\mathfrak{f}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und E_1 ausmacht. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{f}$ mindestens α Brücken von k berührt.

Sei nun $\mathfrak{f}$ ein inneres Flächenstück, das mehrfach zusammenhängend ist. Seine Ränder seien $s_1, s_2, \ldots, s_r$. Jeder Rand liegt auf einem inneren Knie der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa s_j auf $\mathfrak{z}_j$ $(j=1, 2, \ldots, r)$. Keine zwei dieser Knie können auf demselben Torus liegen, da verschiedene Knie desselben Torus aus E_1 disjunkte Elementarflächenstücke ausschneiden, die innere bezüglich des zugehörigen Vollringes sind. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{z}_j$ auf $\mathfrak{T}_j$ liegt. s_j zerlegt dann E_1 in ein bezüglich $\mathfrak{V}_j$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_j$ und das dazu komplementäre Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_j'$, und es ist $\mathfrak{f}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$. Unter den Schartetraedern durch die Grenzlinien der Knie $\mathfrak{z}_j$ sei E das innerste. Da keine zwei Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$ auf demselben Schartetraeder liegen, geht E durch die Grenzlinien nur eines Knies $\mathfrak{z}_j$, etwa durch diejenigen von $\mathfrak{z}_1$. Die Grenzlinien von $\mathfrak{z}_1$ beranden auf E zwei Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{V}_1$, die genau einen Punkt P gemein haben. $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{z}_1$ beranden eine auf $\mathfrak{V}_1$ liegende Kugel $\mathfrak{K}_1$, deren Durchschnitt mit E_1 aus $\mathfrak{e}_1$ besteht. $\mathfrak{e}_1$ setzt sich aus $\mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_r'$ und $\mathfrak{f}$ zusammen, da $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{e}_1$ liegt und $s_2, \ldots, s_r$ Ränder von $\mathfrak{f}$ sind. Da $\mathfrak{K}_1$ auf dem von E berandeten 3-Simplex liegt und die Grenzlinien der Knie $\mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_r$ außerhalb E liegen, besteht der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{z}_j$ $(j=2, \ldots, r)$ aus einem Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_j'$, das $\mathfrak{s}_j$ enthält und dessen Rand t_j auf $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$ liegt. $t_2, \ldots, t_r$ beranden auf $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$ paarweise disjunkte Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$, die aus $\mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_r'$ entstehen, wenn man E_1 in E dehnt. Ersetzt man nun $\mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$ durch $\mathfrak{g}_2', \ldots, \mathfrak{g}_r'$, so entstehen aus $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$, die nur den Punkt P gemein haben. $\mathfrak{m}_1'$ und $\mathfrak{m}_2'$ sind Meridianflächen von $\mathfrak{V}_1$, da ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_1$ nur aus den Rändern der Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{V}_1$ besteht. $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$, $\mathfrak{z}_1$ beranden eine auf $\mathfrak{K}_1$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit E_1 ist $\mathfrak{f}$. Der Durchschnitt von E_1 mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ besteht nämlich aus den Rändern von $\mathfrak{f}$, und $\mathfrak{f}$ stößt mit dem Rande s_1

im Inneren von $\mathfrak{R}$ an $\mathfrak{z}_1$ an. Da $\mathfrak{V}_1$ in bezug auf k die Ordnung α hat, liegen auf $\mathfrak{m}_1'$ mindestens α Schnittpunkte mit k, ebenso auf $\mathfrak{m}_2'$. Da $\mathfrak{g}_2', \ldots, \mathfrak{g}_r'$ auf den Knien $\mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_r$ liegen, können sie von k nicht getroffen werden. Die Schnittpunkte von k mit $\mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2'$ sind also Schnittpunkte von $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ mit k, und sie liegen auf zentrisch monotonen Streckenzügen von k. Da mindestens 2α solcher Schnittpunkte auf $\mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2'$ vorhanden sind, liegen auf dem Durchschnitt $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{R}$ und E_1 mindestens 2α Endpunkte zentrisch monotoner Streckenzüge von k, womit sich auch hier ergibt, daß $\mathfrak{f}$ mindestens α Brücken von k berührt. Der Satz ist damit bewiesen.

Satz 3. *Es sei λ ein Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$. Bezeichnet $b(\lambda)$ bzw. $b(\varkappa)$ die minimale Brückenzahl von λ bzw. $\varkappa$, so gilt*

$$\alpha\, b(\lambda) \leq b(\varkappa) \tag{4}$$

und es ist $b(\lambda) < b(\varkappa)$.

Beweis. Ungleichung (4) ergibt sich durch den Beweis von Satz 2 als Spezialfall von (1). Es ist nur zu zeigen, daß $b(\lambda) < b(\varkappa)$ ist. Wegen (4) könnte dies nur für $\alpha = 1$ nicht der Fall sein. Ist λ ein Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$, so ist[2]) $\varkappa$ das Produkt von λ und einem vom Kreis verschiedenen Knoten μ, und es gibt zwei bezüglich eines Repräsentanten k von $\varkappa$ nebengeordnete Vollringe $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ derart, daß λ durch $\mathfrak{V}_1$ mit k und μ durch $\mathfrak{V}_2$ mit k als Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$ dargestellt wird[3]). Nach Satz 2 ist

$$b(\lambda) + b(\mu) - 1 \leq b(\varkappa). \tag{5}$$

Da μ vom Kreis verschieden ist, ist $b(\mu) \geq 2$ nach Satz 1 und somit $b(\lambda) < b(\varkappa)$.

Da der Kreis als Begleitknoten ausgeschlossen ist, folgt aus den Sätzen 1 und 3

Satz 4. *Sei $b(\varkappa)$ die minimale Brückenzahl des Knotens $\varkappa$. Ein Begleitknoten von $\varkappa$ kann höchstens mit der Ordnung $\frac{1}{2}\, b(\varkappa)$ auftreten.*

Dieser Satz stellt eine Verschärfung von KV § 9, Satz 5 dar. Die hier angegebene Schranke kann angenommen werden, beispielsweise bei Schlauchknoten, deren Träger die minimale Brückenzahl 2 besitzt (§ 11).

Ein Knoten, der keine Begleitknoten besitzt, heißt einfach. Aus den Sätzen 1 und 3 folgt

Satz 5. *Knoten der minimalen Brückenzahl 2 sind einfach.*

Sei wieder λ ein Begleitknoten von $\varkappa$, der als Begleitknoten von $\varkappa$ mit der Ordnung α auftritt[4]). Wir sagen, daß λ als *Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ die Vielfachheit n* besitzt, wenn es für einen Repräsentanten k von $\varkappa$ ein System von n bezüglich k nebengeordneten Vollringen gibt, bei dem λ durch jeden Vollring mit k als Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ dargestellt wird, und wenn es kein solches System von $n+1$ Vollringen gibt. Diese

[2]) KV § 14, Satz 1.

[3]) KV § 14.

[4]) λ kann als Begleitknoten von $\varkappa$ mit verschiedenen Ordnungen auftreten. Vgl. KV § 13.

Definition ist sinnvoll, weil sich aus Satz 2 eine obere Schranke für die Vielfachheit ergibt. Ist $\varkappa$ ein Produktknoten und λ ein Primfaktor von $\varkappa$, so ist[5]) λ Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$ und besitzt als solcher diejenige Vielfachheit, die er in der Primfaktorzerlegung von $\varkappa$ hat[6]). Für einen anderen Faktor μ von $\varkappa$ braucht die hier definierte Vielfachheit nicht mit derjenigen übereinzustimmen, die sich als Zahl der Kompositionsmöglichkeiten von μ aus den Primfaktoren von $\varkappa$ ergibt. Ist beispielsweise $\varkappa$ das vierfache Produkt des Primknotens λ mit sich, $\varkappa = \lambda^4 = \lambda\lambda\lambda\lambda$, so erhält man nach der obigen Definition den Knoten $\mu = \lambda^2$ als Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$ mit der Vielfachheit 2, während man aus 4 Knoten 6 Produkte von je zweien bilden kann.

Satz 6. *Jeder Knoten $\varkappa$ besitzt höchstens endlich viele Begleitknoten, und jeder Begleitknoten besitzt in den Ordnungen, mit denen er als Begleitknoten von $\varkappa$ auftritt, eine endliche Vielfachheit.*

Beweis. Nur die erste Behauptung ist zu beweisen. Da nach Satz 4 die Ordnungen der Begleitknoten von $\varkappa$ beschränkt sind, muß gezeigt werden, daß für jede mögliche Ordnung nur endlich viele Begleitknoten auftreten können. $\varkappa$ besitze Begleitknoten der Ordnung α, und es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ voneinander verschiedene unter ihnen, die Primknoten sind oder solche nichtorientierte Knoten, deren orientierte Komponenten Primknoten sind. μ_i besitze als Begleitknoten der Ordnung α die Vielfachheit n_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Die Knotenlinie k stelle den Knoten $\varkappa$ dar. Für jedes μ_i wählen wir ein System von n_i bezüglich k nebengeordneten Vollringen $\mathfrak{V}_1^i, \mathfrak{V}_2^i, \ldots, \mathfrak{V}_{n_i}^i$ derart, daß μ_i durch $\mathfrak{V}_j^i$ mit k als Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ dargestellt wird. Dies kann so geschehen, daß die Ränder aller Vollringe paarweise punktfremd sind[7]). Keiner dieser Vollringe kann einen anderen im Inneren enthalten. Für zwei Vollringe, die zum gleichen μ_i gehören, ist dies sicher nicht der Fall. Nehmen wir an, daß etwa $\mathfrak{V}_1^1$ im Inneren von $\mathfrak{V}_1^2$ läge. $\mathfrak{V}_1^2$ hätte dann[8]) in bezug auf $\mathfrak{V}_1^1$ die Ordnung 1, und es müßte[9]) entweder $\mu_2 = \mu_1$ sein im Widerspruch zur Wahl der μ_i, oder es wäre μ_2 Begleitknoten der Ordnung 1 von μ_1, was ebenfalls unmöglich ist[10]), da μ_1 Primknoten oder ein nichtorientierter Knoten ist, dessen orientierte Komponenten Primknoten sind. Daher bilden alle für $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ gewählten Vollringe ein einziges bezüglich k nebengeordnetes System. Wegen $b(\mu_i) \geqq 2$ und Satz 2 ist die Anzahl der Vollringe dieses Systems beschränkt, und es ergibt sich, daß r nicht beliebig groß sein kann. Wir können daher annehmen, daß $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ alle verschiedenen Begleitknoten von $\varkappa$ der Ordnung α sind, die Primknoten

[5]) KV § 14, Satz 2.

[6]) Die hier definierte Vielfachheit ist nicht kleiner als diejenige in der Primfaktorzerlegung nach KV § 19, Hilfssatz, und sie ist nicht größer, da sonst die Schlußweise des Beweises von KV § 19, Satz 1 einen Widerspruch ergäbe. Vgl. den Beweis des folgenden Satzes 6.

[7]) Dies ergibt sich durch wiederholte Anwendung von KV § 18, Satz 2.

[8]) KV § 9, Satz 3.

[9]) KV § 9, Satz 2.

[10]) KV § 14, Satz 3.

oder nichtorientierte Knoten mit Primknoten als orientierten Komponenten sind.

Sei nun λ ein Produktknoten, der Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ ist. Die Knotenlinie l stelle λ dar. Zu l gibt es ein nebengeordnetes System von Vollringen, etwa $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_s$ derart[11]), daß $\mathfrak{U}_i$ mit l einen Primfaktor λ_i von λ als Begleitknoten der Ordnung 1 von λ darstellt und daß $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s$ ist. Eine geeignete Umgebung von l macht einen Vollring $\mathfrak{V}$ aus, der l zur Seele hat und im Inneren von $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_s$ liegt. Der Repräsentant k von $\varkappa$ kann so gewählt werden, daß k im Inneren von $\mathfrak{V}$ liegt und daß $\mathfrak{V}$ mit k den Begleitknoten λ von $\varkappa$ mit der Ordnung α darstellt. Dann stellen[12]) auch $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_s$ mit k Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ dar. Die Primknoten λ_i sind daher unter den Begleitknoten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ von $\varkappa$ enthalten, und ihre Vielfachheit in der Primfaktorzerlegung von λ ist nicht größer als ihre Vielfachheit, die sie als Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ besitzen.

Falls λ ein nichtorientierter Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ ist, dessen orientierte Komponenten Produktknoten sind, kann entsprechend geschlossen werden, wenn l eine orientierte Komponente λ' von λ darstellt und für die Primfaktoren von λ' von der Orientierung abgesehen wird.

Es gibt nun nur endlich viele Möglichkeiten, Produkte aus $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ bzw. ihren orientierten Komponenten zu bilden, wenn dabei die Vielfachheit von μ_i als Faktor durch n_i beschränkt ist. Damit ergibt sich die Behauptung.

§ 9. Die minimale Brückenzahl von Produktknoten[1]).

Satz 7. *Für das Produkt von Knoten ist die um* 1 *verminderte minimale Brückenzahl additiv.*

Beweis. Es genügt offenbar, die Behauptung für ein Produkt von zwei Knoten zu beweisen. Dabei kann wegen Satz 1 der Fall außer Acht gelassen werden, daß einer der Faktoren der Kreis ist, da der Kreis für das Produkt von Knoten die Rolle des Einselements spielt.

Es sei $\varkappa$ das Produkt der beiden vom Kreis verschiedenen Knoten λ und μ. Nach § 8 Ungleichung (5) ist

$$b(\lambda) + b(\mu) - 1 \leq b(\varkappa).$$

Wir erhalten die Behauptung, wenn wir eine Brückendarstellung von $\varkappa$ angeben, deren Brückenzahl $b(\lambda) + b(\mu) - 1$ ist. Wir benutzen dazu eine Schar paralleler Ebenen des R^3, die wir als waagerecht bezeichnen.

Es sei l eine Brückendarstellung von λ mit der Brückenzahl $\beta = b(\lambda)$. Dabei sei E_1 die obere, E_2 die untere Grenzebene von l. Es kann angenommen werden, daß die auf E_1 liegenden Stücke von l Strecken sind, die auf einer orientierten Geraden g in E_1 liegen, und daß auf diesen Strecken die von l herrührende Orientierung mit der von g übereinstimmt. Dies läßt sich stets durch eine s-Abbildung des R^3 erreichen, welche die senkrechten Geraden

[11]) KV § 14.
[12]) KV § 13, Satz 1.
[1]) Vgl. hierzu KV §§ 5, 14, 19 und [4].

permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt. Ferner kann angenommen werden, daß die senkrechte Ebene durch g mit den auf E_2 liegenden Stücken von l nur isolierte Punkte gemein hat, da man diese Stücke noch geeignet kombinatorisch isotop auf E_2 deformieren kann. Die gemeinsamen Strecken von g und l bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ in der Reihenfolge, in der sie beim Durchlaufen von g im Sinne der Orientierung auftreten.

Wir wählen nun eine Brückendarstellung m von μ mit der Brückenzahl $\gamma = b(\mu)$ auf folgende Weise (Fig. 14):

1. Es sei E_1 die untere Grenzebene von m, die obere heiße E_0.

2. Für m seien die Verbindungswege der Brückenfußpunkte auf E_1 Strecken auf g, deren von m herrührende Orientierung derjenigen von g entgegengesetzt

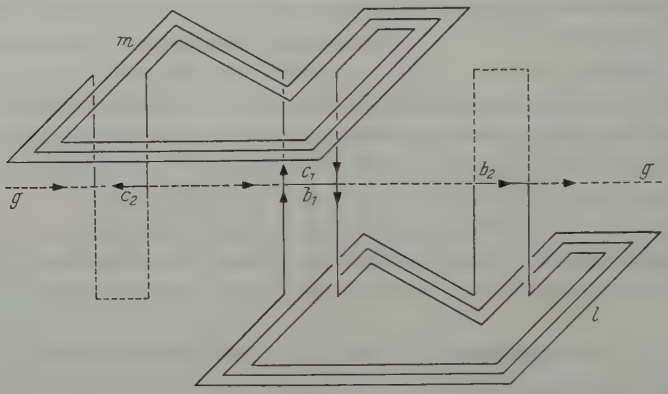


Fig. 14.

ist. Diese Strecken mögen mit $c_1, c_2, \ldots, c_\gamma$ bezeichnet werden in der Reihenfolge, die man bei Durchlaufen von g entgegen seiner Orientierung erhält.

3. Die Strecken b_1 und c_1 fallen mit entgegengesetzter Orientierung zusammen.

4. m treffe keine senkrechte Gerade durch einen Punkt von $b_2, \ldots, b_\beta$, und es treffe l keine senkrechte Gerade durch einen Punkt von $c_2, \ldots, c_\gamma$.

Daß m so gewählt werden kann, erkennt man ohne weiteres, wenn man eine Brückendarstellung von μ mit der Brückenzahl γ zunächst so wählt, daß sie E_1 als untere Grenzebene besitzt, und danach diese Darstellung einer geeigneten s-Abbildung des R^3 unterwirft, welche die senkrechten Geraden permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt.

Läßt man nun von l und m die Strecken b_1 und c_1 fort, so setzen sich die verbleibenden Stücke zu einer Knotenlinie k zusammen, welche den Knoten $\varkappa$ darstellt. Hebt man nämlich $b_2, \ldots, b_\beta$ von E_1 nach unten ab und $c_2, \ldots, c_\gamma$ nach oben, so wird die aus k entstehende Knotenlinie von E_1 nur noch in den Endpunkten von b_1 getroffen und damit der von k repräsentierte Knoten als Produkt der von l und m repräsentierten Knoten λ, μ dargestellt. Man erhält aus k eine Brückendarstellung von $\varkappa$, wenn man bei k die Strecken $b_2, \ldots, b_\beta$ unter gleichzeitiger Verlängerung der daran anstoßenden senk-

rechten Strecken nach oben in E_0 verschiebt und entsprechend die Strecken $c_2, \ldots, c_\gamma$ nach unten in E_2 verschiebt (Fig. 14). Die obige Bedingung 4. besagt, daß dies möglich ist, etwa durch kombinatorisch isotope Deformation von k. Die aus k entstehende Brückendarstellung von $\varkappa$ besitzt dann $\beta + \gamma - 1 = b(\lambda) + b(\mu) - 1$ Brücken, womit sich die Behauptung ergibt.

§ 10. Die minimale Brückenzahl von Schlingknoten[1]).

Satz 8. *Es sei $\varkappa$ ein vom Kreis verschiedener Schlingknoten mit dem Diagonalknoten λ. Für die minimalen Brückenzahlen $b(\varkappa)$, $b(\lambda)$ von $\varkappa$ und λ gilt*

$$b(\varkappa) = 2b(\lambda).$$

Beweis. Ist λ verknotet, so ist[2]) λ nichtorientierter Begleitknoten der Ordnung 2 von $\varkappa$, und wegen Satz 3 gilt

$$b(\varkappa) \geqq 2b(\lambda).$$

Wegen Satz 1 gilt diese Beziehung auch, wenn λ der nichtorientierte Kreis ist. Wir erhalten die Behauptung, wenn wir eine Brückendarstellung von $\varkappa$ angeben, deren Brückenzahl $2b(\lambda)$ ist.

Es sei (E) die Schar der waagerechten Ebenen des R^3. l sei eine Brückendarstellung von λ bezüglich der Schar (E) mit der Brückenzahl $b(\lambda)$. Dabei sei E_1 die obere, E_2 die untere Grenzebene von l. Zu l können wir einen Kreisring $\mathfrak{r}$ angeben, der l als einen Rand besitzt und der aus Elementarflächenstücken auf E_1 und E_2 und dazu senkrechten ebenen Elementarflächenstücken besteht. l' sei der zweite Rand von $\mathfrak{r}$. Bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{r}$ ist auch l' eine Brückendarstellung von λ mit der Brückenzahl $b(\lambda)$. Wir betrachten ein auf E_1 liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{r}$. Durch eine s-Abbildung des R^3, welche die senkrechten Geraden permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt, kann erreicht werden, daß $\mathfrak{e}$ ein Rechteck mit den Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 ist, wobei die Kante P_1P_2 auf l, die Kante P_3P_4 auf l' liegt und P_2P_3, P_4P_1 die beiden anderen Kanten sind. Nach Wegnahme von P_1P_2 verbleibt von l ein Streckenzug v, von l' verbleibt ein Streckenzug v' bei Wegnahme von P_3P_4. P_1P_4 und P_2P_3 sind zwei Querschnitte von $\mathfrak{r}$, die $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{e}$ und ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$ zerlegen. Wir verbinden nun P_1 mit P_4 durch einen Streckenzug u_1 auf E_1 und P_2 mit P_3 durch einen Streckenzug u_2 auf E_1 auf eine der beiden Weisen, die in Fig. 15 a und b dargestellt sind. Dann setzen sich v, v', u_1 und u_2 zu einer nichtorientierten Knotenlinie k zusammen, die einen Schlingknoten mit dem Diagonalknoten λ darstellt. Betrachtet man nämlich das von P_1P_4 und u_1 auf E_1 berandete Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$ und das von P_2P_3 und u_2 auf E_1 berandete Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_2$, so erhält man aus $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{f}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{y}$ mit Selbstdurchdringung, wenn man $\mathfrak{g}_1$ nach oben aus E_1 heraushebt (Fig. 16), und vermöge l erkennt man ohne weiteres, daß $\mathfrak{y}$ den Diagonalknoten λ besitzt.

[1]) Vgl. hierzu Seifert [8] und KV § 20.

[2]) KV § 20, Hilfssatz 2.

Stimmt die Eigenschnittzahl von $\mathfrak{y}$ nicht mit der zu $\varkappa$ gehörigen überein, so ist die nach Fig. 15a oder b erfolgte Wahl von u_1, u_2 durch die andere zu ersetzen. Die Eigenschnittzahl von $\mathfrak{y}$ wechselt dabei das Vorzeichen, weil Fig. 15a und b auseinander durch Spiegelung entstehen. k stellt nun einen Schlingknoten dar, der mit $\varkappa$ in Diagonalknoten und Eigenschnittzahl übereinstimmt. Für die Verdrillungszahl braucht dies noch nicht der Fall zu sein. Man kann dies aber dadurch erreichen, daß man eines der ebenen senkrechten Elementarflächenstücke von $\mathfrak{f}$ durch ein geeignet tordiertes so ersetzt, daß die beiden nicht auf E_1 und E_2 liegenden Randstücke monotone Streckenzüge sind, man fügt also einen geeigneten Zweierzopf ein, was offenbar möglich ist. Da $\varkappa$ durch Diagonalknoten, Eigenschnittzahl und Verdrillungszahl vollständig bestimmt ist, ist nun k eine verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art

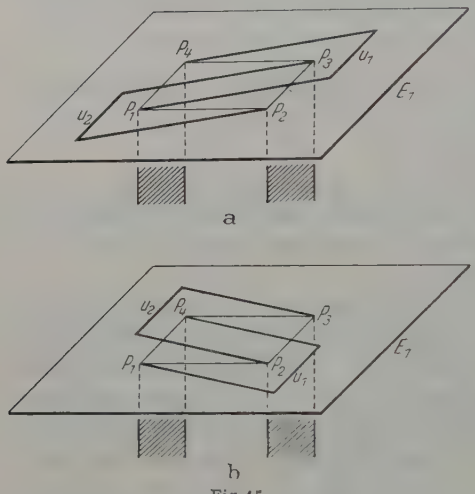


Fig. 15.

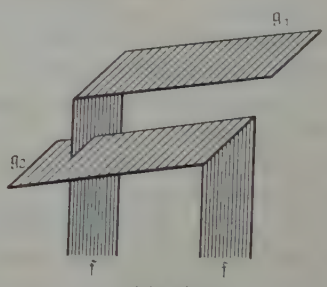


Fig. 16.

von $\varkappa$. Die Brückenzahl von k ist $2b(\lambda)$. Denn es liegen genau $4b(\lambda)$ monotone Streckenzüge auf k, von denen je $2b(\lambda)$ von l und l' herrühren. Der Satz ist damit bewiesen.

Aus Satz 8 und Satz 5 folgt erneut[3]), daß Schlingknoten, die den Kreis als Diagonalknoten besitzen, einfach sind.

§ 11. Die minimale Brückenzahl von Schlauchknoten[1]).

Es sei $\mathfrak{V}$ ein *verknoteter* Vollring, der die Knotenlinie k im Inneren enthält und in bezug auf k die Ordnung $\alpha > 1$ hat. Wenn sich $\mathfrak{V}$ längs einer Meridianfläche so zu einem Prisma aufschneiden läßt, daß k dabei in α Streckenzüge zerfällt, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche des Prismas führen, so stellt $\mathfrak{V}$ mit k einen *Schlauchzopf* dar. α heißt die *Fädenzahl* des Schlauchzopfes. Auf $\mathfrak{V}$ ist k homolog dem α-fachen einer geeignet orientierten Seele von $\mathfrak{V}$. Der durch sie dargestellte Knoten λ ist der *Träger* des Schlauchzopfes. Von dem durch k dargestellten Knoten sagen wir, daß er sich durch einen Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α darstellen läßt.

[3]) KV § 20, Satz 4.

[1]) Vgl. hierzu KV §§ 21, 22, 23.

Ist $\varkappa$ ein Schlauchknoten mit verknotetem Träger λ und der Umlaufzahl α, so läßt sich $\varkappa$ durch einen Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α darstellen.

Satz 9. *Es sei $\varkappa$ ein Knoten, der sich als Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α darstellen läßt. Für die minimalen Brückenzahlen $b(\varkappa)$ und $b(\lambda)$ von $\varkappa$ und λ gilt*

$$b(\varkappa) = \alpha\, b(\lambda).$$

Beweis. λ ist Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$. Zum Beweise der Behauptung genügt es wegen Satz 3, eine Brückendarstellung von $\varkappa$ anzugeben, die $\alpha\, b(\lambda)$ Brücken besitzt.

Der Vollring $\mathfrak{V}'$ in der $\mathfrak{S}^3$ stelle mit der Knotenlinie k' einen Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α dar, wobei $\varkappa$ durch k' dargestellt werde. Längs einer geeigneten Meridianfläche läßt sich $\mathfrak{V}'$ so zu einem senkrechten Prisma $\mathfrak{P}'$ im R^3 aufschneiden, daß k' in α Sehnen $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ von $\mathfrak{P}'$ zerfällt, die monoton von der Dachfläche $\mathfrak{e}_1'$ zur Bodenfläche $\mathfrak{e}_2'$ von $\mathfrak{P}'$ führen. Es gibt also eine simpliziale Abbildung σ' von $\mathfrak{P}'$ auf $\mathfrak{V}'$, die topologisch ist, wenn man übereinanderliegende Punkte von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ identifiziert, und die $k_1' + k_2' + \cdots + k_\alpha'$ in k' überführt. Der $\mathfrak{S}^3$ und dem R^3 seien feste Orientierungen erteilt. Es kann angenommen werden, daß σ' die vom R^3 auf $\mathfrak{P}'$ induzierte Orientierung in die von der $\mathfrak{S}^3$ auf $\mathfrak{V}'$ induzierte überträgt. Ferner kann angenommen werden, daß $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ reguläre Polygone sind und daß σ' die senkrechten Mantellinien von $\mathfrak{P}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}'$ überführt. Wir können außerdem σ' so wählen, daß die Anfangspunkte von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ in dieser Reihenfolge auf einer Geraden durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{e}_1'$ liegen, und zwar so, daß der Anfangspunkt von k_1' der Mittelpunkt von $\mathfrak{e}_1'$ ist. Dies läßt sich durch eine s-Abbildung von $\mathfrak{P}'$ auf sich erreichen, welche auf dem Mantel von $\mathfrak{P}'$ die Identität ist und welche die senkrechten Strecken auf $\mathfrak{P}'$ permutiert. Schließlich können wir annehmen, daß jede der Sehnen $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ ein senkrechtes Anfangsstück besitzt. Dies läßt sich nämlich durch eine isotope simpliziale Deformation dieser Sehnen bewirken, welche die Anfangs- und Endpunkte festläßt und bei welcher die Sehnen monoton bleiben, also auch durch eine s-Abbildung von $\mathfrak{P}'$ auf sich, welche auf dem Rande von $\mathfrak{P}'$ die Identität ist. Wir zerlegen nun $\mathfrak{P}'$ durch ein waagerechtes Elementarflächenstück $\mathfrak{f}'$ so in eine obere Kugel $\mathfrak{P}_1'$ und eine untere Kugel $\mathfrak{P}_2'$, daß die auf $\mathfrak{P}_1'$ liegenden Stücke von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ senkrecht sind. Der Durchschnitt von $\mathfrak{P}_i'$ $(i = 1, 2)$ mit dem Mantel von $\mathfrak{P}'$ ist ein Kreisring $\mathfrak{z}_i'$. Auf $\mathfrak{P}_1'$ gibt es ein senkrechtes, rechteckiges Elementarflächenstück $\mathfrak{r}_1'$, das die auf $\mathfrak{P}_1'$ liegenden Stücke von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ enthält und dessen Rand aus je einer senkrechten Strecke auf k_1' und k_α' und je einer waagerechten Strecke auf $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{f}'$ besteht. a' sei die von $\mathfrak{e}_1'$ nach $\mathfrak{e}_2'$ orientierte Achse von $\mathfrak{P}'$. $\sigma'(a')$ ist eine orientierte Seele von $\mathfrak{V}'$, die den Knoten λ darstellt.

Es sei nun (E) eine Schar konzentrischer Tetraeder des R^3, deren Mittelpunkt im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegt. l sei eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art von λ bezüglich (E) mit der Brückenzahl $b(\lambda)$. E_1 sei das innere,

E_2 das äußere Grenztetraeder von l. Es kann wegen Hilfssatz 3 angenommen werden, daß l im Inneren des Projektionskegels vom Scharzentrum nach den waagerechten Tetraederseiten liegt und bezüglich der waagerechten Ebenen des R^3 eine Brückendarstellung von λ ist. $\mathfrak{V}$ sei ein Vollring, der l zur Seele hat. Wegen Hilfssatz 7 können wir annehmen, daß der Rand $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{V}$ bezüglich (E) in Brückenform ist.

Zu l können wir einen Kreisring $\mathfrak{r}$ im Inneren von $\mathfrak{V}$ angeben, der l als einen Rand besitzt und der aus ebenen Elementarflächenstücken auf E_1 und E_2 und dazu senkrechten ebenen Elementarflächenstücken besteht, wobei jedes solche Elementarflächenstück mit l genau ein Stück des Randes gemein hat. Es sei $\mathfrak{s}_2$ ein Schenkel von $\mathfrak{T}$. Seine Grenzlinien beranden auf ihren Schartetraedern je eine Meridianfläche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{V}$. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ zerlegen $\mathfrak{V}$ in zwei Kugeln $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, wobei $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{s}_2$ berandet werde. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_2$ und l ist eine Strecke. Die Bezeichnungen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ seien so gewählt, daß diese Strecke im Sinne der Orientierung von l von $\mathfrak{f}$ nach $\mathfrak{c}$ führt. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_i$ $(i=1, 2)$ mit $\mathfrak{r}$ ist ein Elementarflächenstück $\mathfrak{r}_i$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{r}_i$ mit $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{f}$ ist eine waagerechte Strecke.

σ^* sei nun eine semilineare Abbildung von $\mathfrak{P}_2'$ auf $\mathfrak{K}_2$ mit den folgenden Eigenschaften[2]):

1. σ^* überträgt die vom R^3 auf $\mathfrak{P}_2'$ induzierte Orientierung in die von der $\mathfrak{S}^3$ auf $\mathfrak{K}_2$ induzierte.

2. Es ist $\mathfrak{c}=\sigma^*(\mathfrak{c}_2')$ und $\mathfrak{f}=\sigma^*(\mathfrak{f}')$. Dabei geht der Durchschnitt von $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{r}_1'$ in den Durchschnitt von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{r}$ über, und der Durchschnitt von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{r}$ ist das Bild derjenigen Strecke auf $\mathfrak{c}_2'$, die aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{c}_1'$ und $\mathfrak{r}_1'$ durch Translation längs der Achse von $\mathfrak{P}'$ entsteht.

3. Die auf $\mathfrak{P}_2'$ liegenden Stücke von k_1', k_2', ..., k_α' gehen in zentrisch monotone Streckenzüge auf $\mathfrak{K}_2$ über, und der Durchschnitt von l und $\mathfrak{K}_2$ ist das Bild der Achse von $\mathfrak{P}_2'$.

σ^* läßt sich so auf $\mathfrak{P}_1'$ fortsetzen, daß $\mathfrak{P}_1'$ auf $\mathfrak{K}_1$ abgebildet wird, daß übereinanderliegende Punkte von $\mathfrak{c}_1'$ und $\mathfrak{c}_2'$ denselben Bildpunkt auf $\mathfrak{c}$ haben und daß die senkrechten Mantellinien von $\mathfrak{P}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}$ übergehen[3]). Das Bild von $\mathfrak{r}_1'$ ist dann ein Elementarflächenstück $\mathfrak{r}_1^*$ auf $\mathfrak{K}_1$, dessen Durchschnitt mit dem Rande von $\mathfrak{K}_1$ aus je einer Strecke auf $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ besteht, die den Durchschnitt von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{f}$ ausmacht. Die beiden restlichen Randstücke von $\mathfrak{r}_1$ bzw. $\mathfrak{r}_1^*$ bilden zwei unverknotete Sehnen u_1, u_2 bzw. u_1^*, u_2^* von $\mathfrak{K}_1$, die von $\mathfrak{c}$ nach $\mathfrak{f}$ orientiert seien. Auf dem Rande von $\mathfrak{K}_1$ können wir zwei disjunkte Streckenzüge v_1, v_2 wählen, die u_1, u_2 zu Knotenlinien schließen und die mit $\mathfrak{r}_1$ nur ihre Endpunkte gemein haben. Die Verschlingungszahl von u_1+v_1 und u_2+v_2 bezeichnen wir als die Windungszahl von $\mathfrak{r}_1$. Die Windungszahl von $\mathfrak{r}_1^*$ erhält man entsprechend vermöge $u_1^*+v_1$ und $u_2^*+v_2$. Die beiden Windungszahlen brauchen nicht übereinzustimmen. Wir können dies aber dadurch erreichen, daß wir eines der senkrechten, bisher ebenen

[2]) Daß eine solche Abbildung existiert, ergibt sich beispielsweise durch die Konstruktion von KV § 23, Beweis von Hilfssatz 2, sechster Schritt.

[3]) Vgl. KV § 3.

Elementarflächenstücke von $\mathfrak{r}_1$ geeignet tordieren, und zwar so, daß das auf l liegende Randstück festbleibt und daß das tordierte Elementarflächenstück mit jedem schneidenden Schartetraeder nur einen Querschnitt gemein hat. Nun gibt es eine s-Abbildung φ der $\mathfrak{S}^3$ auf sich[4]), die $\mathfrak{r}_1^*$ in $\mathfrak{r}_1$ überführt und im Komplement von $\mathfrak{K}_1$ die Identität ist. Die auf $\mathfrak{P}_1'$ liegenden Stücke von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ gehen durch $\varphi\sigma^*$ in Sehnen von $\mathfrak{K}_1$ über, die auf $\mathfrak{r}_1$ liegen und von e nach f führen. Wenn φ geeignet gewählt ist, so liegt für jede dieser Sehnen nur je ein Streckenzug auf den waagerechten Elementarflächenstücken von $\mathfrak{r}_1$ auf E_1 und E_2 und auch nur je ein Streckenzug auf den senkrechten Stücken von $\mathfrak{r}_1$, wobei noch diese letzten Streckenzüge monoton sind. Für die von k_1' und k_α' herrührenden Sehnen von $\mathfrak{K}_1$ ist dies von selbst der Fall, da sie auf dem Rande von $\mathfrak{r}_1$ liegen. Wenn es für die anderen noch nicht der Fall ist, so läßt es sich durch kombinatorisch isotope Deformation auf $\mathfrak{r}_1$ erreichen und daher auch dadurch, daß man φ geeignet ändert[5]).

$\sigma = \varphi\sigma^*$ ist nun eine simpliziale Abbildung von $\mathfrak{P}'$ auf $\mathfrak{V}$, die topologisch ist, wenn man übereinanderliegende Punkte von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ identifiziert, und die die senkrechten Mantellinien von $\mathfrak{P}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}$ überführt. Das Bild der von $\mathfrak{e}_1'$ nach $\mathfrak{e}_2'$ orientierten Achse a' von $\mathfrak{P}'$ ist l. Die Bilder von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ setzen sich zu einer Knotenlinie k zusammen, die eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art bezüglich (E) ist. Die Brückenzahl von k ist $\alpha\, b(\lambda)$. Der Durchschnitt von k mit E_1 besteht nämlich nur aus Streckenzügen auf $\mathfrak{r}_1$, nach Wahl von l und $\mathfrak{r}$ besteht der Durchschnitt von $\mathfrak{r}_1$ und E_1 aus $b(\lambda)$ Elementarflächenstücken, und auf jedem solchen liegen genau α Streckenzüge von k.

Wir sind am Ziele, wenn wir noch zeigen, daß k den Knoten $\varkappa$ darstellt. Nun vermitteln σ' und σ eine semilineare Abbildung τ von $\mathfrak{V}'$ auf $\mathfrak{V}$, welche die von der $\mathfrak{S}^3$ induzierte Orientierung von $\mathfrak{V}'$ in diejenige von $\mathfrak{V}$ überträgt und welche die Breitenkreise von $\mathfrak{V}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}$ überführt. Die orientierte Seele $\sigma'(a')$ von $\mathfrak{V}'$ geht vermöge τ in die orientierte Seele $\sigma(a') = l$ von $\mathfrak{V}$ über. Da nun λ sowohl durch $\sigma'(a')$ als auch durch l dargestellt wird, läßt sich τ zu einer s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich erweitern[6]). Dabei ist $k = \tau(k')$, wie man vermöge σ', σ und der Sehnen $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ von $\mathfrak{P}'$ erkennt. k stellt also tatsächlich den Knoten $\varkappa$ dar. Der Satz ist damit bewiesen.

Anmerkung. Im vorangehenden Beweis haben wir bei der Konstruktion von k keinen Gebrauch von der Verknotung von λ gemacht. Durch dieselbe Schlußweise ergibt sich daher:

Wenn sich der Knoten $\varkappa$ durch einen geschlossenen Zopf der Fädenzahl α darstellen läßt, so ist $b(\varkappa) \leq \alpha$.

Die minimale Brückenzahl $b(\varkappa)$ von $\varkappa$ kann dabei kleiner sein als die kleinste Fädenzahl der geschlossenen Zöpfe, durch welche sich $\varkappa$ darstellen läßt[7]). Beispielsweise lassen sich durch geschlossene Zöpfe der Fädenzahl 2

[4]) Graeub [*1*] § 8.

[5]) KV § 2, Satz 2, Anmerkung 3 und Satz 4.

[6]) KV § 11, Satz 2.

[7]) Jeder Knoten läßt sich durch geschlossene Zöpfe darstellen.

nur der Kreis und die Torusknoten der Umlaufzahl 2 darstellen. Da die beiden Kleeblattschlingen die beiden einzigen Schlingknoten sind, die zugleich Torusknoten sind[8]), kann ein vom Kreis und den beiden Kleeblattschlingen verschiedener Schlingknoten, der den Kreis als Diagonalknoten besitzt, nicht durch einen geschlossenen Zopf mit nur 2 Fäden dargestellt werden. Die minimale Brückenzahl eines solchen Knotens ist jedoch 2 nach Satz 8.

Durch Satz 9 sind insbesondere diejenigen Schlauchknoten erfaßt, deren Träger verknotet ist. Für Torusknoten, also Schlauchknoten, deren Träger der Kreis ist, gilt entsprechend

Satz 10. *Es sei $\varkappa$ ein Torusknoten der Umlaufzahl α und der Verschlingungszahl δ, wobei Umlauf- und Verschlingungszahl so bezogen sind, daß $\alpha < |\delta|$ ist. Dann ist α die minimale Brückenzahl von $\varkappa$.*

Beweis. Ein Torus in $\mathfrak{E}^3$, der aus zwei waagerechten und zwei senkrechten Kreisringen besteht, zerlegt die $\mathfrak{E}^3$ in zwei unverknotete Vollringe, und man erkennt ohne weiteres, daß sich $\varkappa$ durch eine Knotenlinie auf diesem Torus darstellen läßt, die eine Brückendarstellung von $\varkappa$ mit nur α Brücken ist (vgl. Fig. 1b). Es muß also gezeigt werden, daß jede Brückendarstellung von $\varkappa$ mindestens α Brücken besitzt.

Es sei $\mathfrak{T}'$ ein Torus in der $\mathfrak{E}^3$, der die $\mathfrak{E}^3$ in die beiden unverknoteten Vollringe $\mathfrak{V}_1'$ und $\mathfrak{V}_2'$ zerlegt. k' sei eine Knotenlinie auf $\mathfrak{T}'$, die den Knoten $\varkappa$ darstellt. k' habe die Umlaufzahl α und die Verschlingungszahl δ etwa bezüglich $\mathfrak{V}_1'$. Bezüglich $\mathfrak{V}_2'$ hat dann k' die Umlaufzahl $|\delta|$ und die Verschlingungszahl $\alpha \operatorname{sign} \delta$. Wenn man $\mathfrak{V}_1'$ längs einer Meridianfläche aufschneidet, deren Rand von k' in nur α Punkten getroffen wird, so erkennt man, daß es auf $\mathfrak{V}_1'$ einen Kreisring $\mathfrak{r}_1'$ gibt, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{T}'$ nur aus k' besteht. Der zweite Rand von $\mathfrak{r}_1'$ sei k_1', wobei k_1' so orientiert sei, daß k_1' auf $\mathfrak{r}_1'$ zu k' homolog ist. Entsprechend sei $\mathfrak{r}_2'$ ein Kreisring auf $\mathfrak{V}_2'$, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{T}'$ nur aus k' besteht und dessen zweiter Rand k_2' so orientiert sei, daß k_2' auf $\mathfrak{r}_2'$ zu k' homolog ist. $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ bilden zusammen einen Kreisring $\mathfrak{r}'$ mit den Rändern k_1' und k_2'. Die Verschlingungszahl von k_1' mit k_2' ist $\alpha\delta$.

Es sei nun (E) die Schar der waagerechten Ebenen des R^3. k sei eine Brückendarstellung von $\varkappa$ bezüglich (E) von minimaler Brückenzahl $b(\varkappa)$. E_1 sei die obere, E_2 die untere Grenzebene von k. Zu k wählen wir einen Kreisring $\mathfrak{r}$ so, daß k Mittellinie von $\mathfrak{r}$ ist, d.h. k liegt auf $\mathfrak{r}$, ohne die Ränder von $\mathfrak{r}$ zu treffen, und ist Erzeugende der eindimensionalen Homologiegruppe von $\mathfrak{r}$. $\mathfrak{r}$ soll zunächst so gewählt werden, daß $\mathfrak{r}$ nur aus ebenen Elementarflächenstücken auf E_1 und E_2 und dazu senkrechten ebenen Elementarflächenstücken besteht, wobei k auf jedem solchen Elementarflächenstück einen Querschnitt bildet. k_1 und k_2 seien die Ränder von $\mathfrak{r}$ und seien so orientiert, daß sie auf $\mathfrak{r}$ zu k homolog sind. Wenn die Verschlingungszahl von k_1 und k_2 noch nicht $\alpha\,\delta$ ist, so erreichen wir es dadurch, daß wir eines der senkrechten Elementarflächenstücke von $\mathfrak{r}$ geeignet tordieren, und zwar so, daß

[8]) Dies folgt aus KV § 20, Satz 1 und § 21, Satz 1.

das tordierte Elementarflächenstück mit jeder schneidenden waagerechten Ebene nur einen Querschnitt gemein hat. k_1 und k_2 sind verallgemeinerte Brückendarstellungen erster Art von $\varkappa$ bezüglich (E), und es haben k_1 und k_2 die Brückenzahl $b(\varkappa)$.

Es kann angenommen werden, daß $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{E}^3$ liegt. Nach dem unten nachzutragenden Hilfssatz 8 gibt es nun eine s-Abbildung φ der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die $\mathfrak{r}'$ in $\mathfrak{r}$ überführt. φ kann so gewählt werden[9]), daß $\mathfrak{T} = \varphi(\mathfrak{T}')$ im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegt und daß die Ebenenschar (E) zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{T}$ zerlegt die $\mathfrak{S}^3$ in die beiden unverknoteten Vollringe $\mathfrak{V}_1 = \varphi(\mathfrak{V}_1')$ und $\mathfrak{V}_2 = \varphi(\mathfrak{V}_2')$. Die Bezeichnung von k_1 und k_2 sei so gewählt, daß k_i in $\mathfrak{V}_i$ liegt $(i = 1, 2)$. Durch φ wird dann k_i' auf k_i abgebildet. Möglicherweise sind $\varphi(k_i')$ und k_i entgegengesetzt orientiert, doch ist dies belanglos. Jedenfalls hat k_1 auf $\mathfrak{V}_1$ die Umlaufzahl α, ist also auf $\mathfrak{V}_1$ homolog dem α-fachen einer geeignet orientierten Seele von $\mathfrak{V}_1$, k_2 hat auf $\mathfrak{V}_2$ die Umlaufzahl $|\delta|$. Es gibt nun eine waagerechte Ebene E, die $\mathfrak{T}$ in einem Meridian eines von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Vollringes schneidet[10]). Es sei m eine auf E innerste solche Schnittlinie von E und $\mathfrak{T}$. m berandet also auf E ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$, das außer seinem Rand keine Schnittlinie mit $\mathfrak{T}$ enthält, die Meridian eines von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Vollringes ist. Auf $\mathfrak{e}$ liegen möglicherweise noch weitere Schnitte mit $\mathfrak{T}$, doch sind diese auf $\mathfrak{T}$ nullhomolog, weil andernfalls die Existenz eines weiteren Meridianschnittes von $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{T}$ folgte[11]).

Sei zunächst m Meridian von $\mathfrak{V}_1$. Durch Deformation von $\mathfrak{e}$ kann man dann eine Meridianfläche von $\mathfrak{V}_1$ erhalten, deren Durchschnitt mit k_1 auf $\mathfrak{e}$ liegt[12]). Da k_1 auf $\mathfrak{V}_1$ die Umlaufzahl α hat, durchsetzt k_1 jede Meridianfläche von $\mathfrak{V}_1$ mindestens α-mal im gleichen Sinne. Hieraus folgt, daß das waagerechte Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ zwischen E_1 und E_2 liegt, also k_1 nur in Punkten der monotonen Streckenzüge von k_1 trifft, und daß $\mathfrak{e}$ von mindestens α monotonen Streckenzügen von k_1 im gleichen Sinne durchsetzt wird. k_1 muß daher mindestens α Brücken besitzen.

Ist m Meridian von $\mathfrak{V}_2$, so folgt entsprechend, daß k_2 mindestens $|\delta|$ Brücken besitzt, weil $|\delta|$ die Umlaufzahl von k_2 auf $\mathfrak{V}_2$ ist. Nach Konstruktion ist $b(\varkappa)$ die Brückenzahl von k_1 und k_2. Wegen $|\delta| > \alpha$ ergibt sich also jedenfalls $b(\varkappa) \geqq \alpha$, was zu zeigen war.

Es sei $\mathfrak{r}$ ein Kreisring in der $\mathfrak{S}^3$. Durch seine Ränder wird ein nichtorientierter Knoten dargestellt, den wir als die *Verknotung des Kreisringes* $\mathfrak{r}$ bezeichnen. Die beiden Ränder von $\mathfrak{r}$ mögen so orientiert werden, daß sie auf $\mathfrak{r}$ zueinander homolog sind. Ihre Verschlingungszahl ist dieselbe in beiden möglichen Orientierungen. Wir bezeichnen sie als die *Verdrillung des Kreisringes* $\mathfrak{r}$.

Hilfssatz 8. *Zwei Kreisringe in der $\mathfrak{S}^3$ lassen sich genau dann durch s-Abbildungen der $\mathfrak{S}^3$ ineinander überführen, wenn sie in Verknotung und Verdrillung übereinstimmen.*

[9]) KV § 1, Satz 5, Satz 6 und anschließende Bemerkungen.
[10]) KV § 4, Satz 2.
[11]) Vgl. KV § 4, Beweis von Satz 2.
[12]) KV § 9, Hilfssatz 6.

Beweis. Unterwirft man einen Kreisring in der $\mathfrak{S}^3$ einer s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, so bleiben Verknotung und Verdrillung erhalten. Es seien nun $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ zwei Kreisringe in der $\mathfrak{S}^3$, die in Verknotung und Verdrillung übereinstimmen. Zu $\mathfrak{r}_1$ kann man einen Kreisring $\mathfrak{s}_1$ angeben, der mit $\mathfrak{r}_1$ nur die Ränder gemein hat und der zusammen mit $\mathfrak{r}_1$ einen Vollring $\mathfrak{V}_1$ berandet, auf dem die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ bei Orientierung die Umlaufzahl 1 haben. Man kann $\mathfrak{s}_1$ etwa dadurch erhalten, daß man $\mathfrak{r}_1$ bei festen Rändern „von sich selbst abhebt“[13]), also geeignet deformiert. Entsprechend erhält man einen Vollring $\mathfrak{V}_2$ für $\mathfrak{r}_2$. $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ sind gleich verknotet. Da nämlich die Ränder von $\mathfrak{r}_i$ $(i=1, 2)$ auf $\mathfrak{V}_i$ die Umlaufzahl 1 haben, stellen sie denselben nichtorientierten Knoten dar[14]) wie die Seelen von $\mathfrak{V}_i$, und es sind $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ gleich verknotet. Es gibt daher eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die $\mathfrak{V}_1$ auf $\mathfrak{V}_2$ abbildet[15]), und wir können weiterhin annehmen, daß $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ zusammenfallen. Es sei $\mathfrak{T}$ der Rand und a eine orientierte Seele von $\mathfrak{V}_1=\mathfrak{V}_2$. Die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ mögen so orientiert werden, daß sie auf $\mathfrak{V}_1$ zu a homolog sind. Die Verdrillung von $\mathfrak{r}_i$ ist nun zugleich die Verschlingungszahl eines Randes von $\mathfrak{r}_i$ mit a. Da $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ dieselbe Verdrillung besitzen, ergibt sich, daß die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ derselben Homologieklasse von $\mathfrak{T}$ angehören. Es gibt folglich[16]) eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die $\mathfrak{T}$ auf sich abbildet und die die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ in diejenigen von $\mathfrak{r}_2$ überführt, wobei die Abbildung so gewählt werden kann, daß $\mathfrak{r}_1$ in $\mathfrak{r}_2$ übergeht. Damit erhalten wir die Behauptung.

Literatur.

[1] GRAEUB, W.: Die semilinearen Abbildungen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 4. Abh. **1950**. — [2] MILNOR, J. W.: On the total curvature of knots. Ann. Math. (2) **52**, 248—257 (1950). — [3] REIDEMEISTER, K.: Knotentheorie. Berlin 1932. — [4] SCHUBERT, H.: Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3. Abh. **1949**. — [5] SCHUBERT, H.: Knoten und Vollringe. Acta Math. **90**, 131—286 (1953). — [6] SEIFERT, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. **110**, 571—592 (1935). — [7] SEIFERT, H.: On the homology invariants of knots. Quart. J. Oxford (2) **1**, 23—32 (1950). — [8] SEIFERT, H.: Schlingknoten. Math. Z. **52**, 62—80 (1949). — [9] WENDT, H.: Die gordische Auflösung von Knoten. Math. Z. **42**, 680—696 (1937).

[13]) Vgl. KV Anmerkung 2 zum Satz von § 8.
[14]) KV § 6, Hilfssatz 3.
[15]) KV § 10, Satz 1.
[16]) KV § 2, Satz 4 und Anmerkung.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. Juli 1954.)

MEINARDUS, G.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 289—302 (1954)

Über Partitionen mit Differenzenbedingungen.

Von
GÜNTER MEINARDUS.

In der vorliegenden Arbeit werden für einige Partitionenanzahlen asymptotische Aussagen bewiesen. Es handelt sich im § 1 darum, ein Theorem von INGHAM [1] so abzuändern, daß ein monotones Wachstum der Zerlegungsanzahl nicht mehr vorausgesetzt zu werden braucht. Der in einer früheren Arbeit [2] bewiesene Satz über die Entwicklungskoeffizienten gewisser Funktionen der Gestalt

$$f(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n}, \qquad (\Re(\tau) > 0,\ a_n \geq 0)$$

läßt sich (ohne das Fehlerglied) aus dem Satz 1 gewinnen. Im § 2 wird eine weitere Anwendung von Satz 1 gemacht. Betrachtet werden die Entwicklungskoeffizienten $r(n)$ der Funktion

$$F(v) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\frac{kl}{2}\nu(\nu-1)+m\nu}}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)\, v^n \qquad (|v| < 1).$$

Hier sind k, l und m natürliche Zahlen mit $(m, k) = 1$. Es ergibt sich für $r(n)$ eine asymptotische Gleichung für $n \to \infty$. Durch Spezialisierung von k und l in § 3 erhält $r(n)$ verschiedene zahlentheoretische Bedeutungen als Partitionenanzahl unter gewissen Differenzenbedingungen. Die angeführten Beispiele wurden zum Teil analog zu denen von [2] ausgewählt.

Es ist bemerkenswert, daß die Sattelpunktmethode hier zweimal zur Anwendung gelangt, einmal im Satz 1 zur Herleitung der asymptotischen Gleichung für $r(n)$, zum anderen im Satz 2 zum Beweis einer asymptotischen Beziehung für die Funktion $F(v)$ bei der Annäherung $v \to 1 - 0$. Transformationseigenschaften von $F(e^{2\pi i \tau})$ gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe werden an keiner Stelle des Beweises benutzt.

§ 1. Eine asymptotische Aussage.

Im Satz 1 treten zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ der komplexen Variablen z auf, die den folgenden Bedingungen genügen sollen:

1. In einem Gebiet D der z-Ebene seien $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ regulär. Sie seien reell und positiv für reelles positives $z = x$ in einem festen Intervall $0 < x \leq \xi$, welches zu D gehöre.

2. Nimmt x echt monoton gegen $0+0$ ab, so strebe $-\varphi'(x)$ echt monoton gegen $+\infty$. Es gelte ferner

$$\{\varphi''(x)\}^{-\frac{1}{2}} = o\big(\delta(x)\big) \quad \text{für} \quad x \to 0+0,$$

wobei $\delta(x)$ den Abstand des Punktes x vom Komplement von D bedeutet.

3. Für $x \to 0+0$ gelte

$$\chi(x+v) = O\big(\chi(x)\big),$$
$$\varphi''(x+v) = O\big(\varphi''(x)\big)$$

gleichmäßig in v für $|v| < \delta(x)$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Satz 1. *a) Die Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)\, e^{-nz} \tag{1}$$

sei konvergent für $\Re(z) > 0$. *Die Koeffizienten* $r(n)$ *seien reell.*

b) Es sei $z = x + i\,y$ *die Zerlegung von* z *in Real- und Imaginärteil,* $x > 0$ *und* $\varkappa(x)$ *eine reelle, positive Funktion von* x *mit den Eigenschaften*

$$\{\varphi''(x)\}^{-\frac{1}{2}} = o\big(\varkappa(x)\big); \qquad \varkappa(x) = o\big(\delta(x)\big) \quad \textit{für} \quad x \to 0; \tag{2}$$

es gelte

$$f(z) = \chi(z)\, e^{\varphi(z)} \cdot \big(1 + o(1)\big) \quad \textit{für} \quad x \to 0 \tag{3}$$

gleichmäßig in y *für* $|y| \leq \varkappa(x)$.

c) Für $\varkappa(x) < |y| \leq \pi$ *sei*

$$f(z) = o\left\{\frac{f(x)}{(\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad \textit{für} \quad x \to 0 \tag{4}$$

gleichmäßig in y.

Dann ist

$$r(n) = \frac{\chi(x)\, e^{\varphi(x)+nx}}{(2\pi\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}} \cdot \big(1 + o(1)\big) \quad \textit{für} \quad n \to \infty, \tag{5}$$

wobei x *die für hinreichend großes* n *eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung*

$$-\varphi'(x) = n$$

ist.

Beweis. Aus Gl. (1) erhält man für $x > 0$ die Integraldarstellung

$$r(n) = \frac{e^{nx}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + i\,y)\, e^{iny}\, dy.$$

Eine Aufteilung des Integrationsweges ergibt

$$r(n) = I_1 + I_2, \tag{6}$$

wobei

$$I_1 = \frac{e^{nx}}{2\pi} \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} f(x+iy)\, e^{iny}\, dy$$

und

$$I_2 = \frac{e^{nx}}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\varkappa(x)} + \int_{+\varkappa(x)}^{+\pi} \right\} f(x+iy)\, e^{iny}\, dy$$

ist. Nach (3) und (4) folgt

$$I_2 = o\left\{ \frac{\chi(x)\, e^{\varphi(x)+nx}}{(\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{7}$$

Das Integral I_1 wird nun wie bei INGHAM ([1], S. 1080) asymptotisch ausgewertet. Nach (3) ist

$$I_1 = \frac{e^{nx}}{2\pi} \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} \chi(x+iy)\, e^{\varphi(x+iy)+iny+o(1)}\, dy.$$

Es gelten (s. [1], Lemma 1) folgende asymptotische Beziehungen:

$$\chi(x+v) = \chi(x)\,(1+o(1)),$$

$$\varphi(x+v) = \varphi(x) + v\varphi'(x) + \frac{v^2}{2}\varphi''(x) + o\left(|v|^2 \varphi''(x)\right)$$

gleichmäßig in v für $x \to 0$ und $|v| \leq \varkappa(x)$.

Mit $v = iy$ wird dann

$$I_1 = \frac{\chi(x) \cdot e^{\varphi(x)+nx}}{2\pi} \left\{ \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} e^{-\frac{y^2}{2}\varphi''(x)}\, dy + \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} e^{-\frac{y^2}{2}\varphi''(x)} \left(e^{o(y^2\varphi''(x)+1)} - 1\right) dy \right\}.$$

Nun ist

$$e^{o(y^2\varphi''(x)+1)} - 1 = o\left(y^2\varphi''(x) + 1\right) e^{\frac{y^2}{4}\varphi''(x)},$$

also

$$I_1 = \frac{\chi(x) \cdot e^{\varphi(x)+nx}}{2\pi} \left\{ \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} e^{-\frac{y^2}{2}\varphi''(x)}\, dy + o\left(\int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} \left(y^2\varphi''(x) + 1\right) e^{-\frac{y^2}{4}\varphi''(x)}\, dy \right) \right\}$$

$$= \frac{\chi(x) \cdot e^{\varphi(x)+nx}}{2\pi\sqrt{\varphi''(x)}} \left\{ \int_{-\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}}^{+\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}} e^{-\frac{w^2}{2}}\, dw + o\left(\int_{-\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}}^{+\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}} (w^2+1)\, e^{-\frac{w^2}{4}}\, dw \right) \right\}.$$

Da nach (2) der Ausdruck $\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}$ für $x \to 0$ gegen $+\infty$ strebt, erhält man

$$I_1 = \frac{\chi(x)\, e^{\varphi(x)+nx}}{\sqrt{2\pi\varphi''(x)}} \left(1 + o(1)\right),$$

woraus sich nach (6) und (7) die Behauptung (5) des Satzes ergibt.

§ 2. Anwendung von Satz 1.

Es seien k, l und m natürliche Zahlen mit $(m, k) = 1$. Ferner sei $F(u, v)$ eine Funktion der beiden komplexen Veränderlichen u und v, welche für festes v mit $|v| < 1$ in einer Umgebung der Stelle $u = 0$ in u regulär ist. Dort gelte die Funktionalgleichung

$$F(u, v) = F(u \cdot v^k, v) + u \cdot v^m \cdot F(u \cdot v^{kl}, v). \tag{8}$$

Nimmt man noch $F(0, v) = 1$ an für alle v, so erkennt man aus (8) leicht, daß $F(u, v)$ für jedes u eine reguläre Funktion von v im Einheitskreis ist, nämlich

$$F(u, v) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\frac{kl}{2}\cdot\nu(\nu-1)+m\nu}\, u^\nu}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})}. \tag{9}$$

Läßt man auch $l = 0$ zu, was im folgenden nicht geschehen soll, so erhält man eine für $|v| < 1$ meromorphe Funktion von u. Mit Hilfe von Satz 1 gewinnen wir den

Satz 2. *Für den Koeffizienten $r(n)$ in der für $|v| < 1$ gültigen Entwicklung*

$$F(1, v) = F(v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)\, v^n \tag{10}$$

gilt

$$r(n) \sim C(k, l, m)\, n^{-\frac{3}{4}}\, e^{2\sqrt{\frac{A_l}{k}\cdot n}} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Hier ist

$$C(k, l, m) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{A_l}{k}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{(\alpha_l)^{l+1-\frac{2m}{k}} \cdot \left(l(\alpha_l)^{l-1} + 1\right)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$A_l = \frac{l}{2} \log^2 \alpha_l + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha_l)^{r \cdot l}}{r^2}$$

und

$$\alpha_l \text{ reell und } > 0, \quad (\alpha_l)^l + \alpha_l - 1 = 0.$$

Bemerkung. Es ist $A_1 = \pi^2/12$ und $A_2 = \pi^2/15$. — Die Polynome $x^l + x - 1$ mit $l \equiv -1$ modulo 6 sind durch das sechste Kreisteilungspolynom teilbar, worauf mich Herr M. KNESER freundlicherweise hinwies. Im Falle $l \not\equiv -1$ modulo 6 hat das Polynom $x^l + x - 1$ keine Einheitswurzeln als Nullstellen, jedoch ist mir nicht bekannt, ob es allgemein irreduzibel ist.

Beweis von Satz 2. Wir leiten zunächst eine Integraldarstellung für die Funktion $F(v)$ her. Aus Gl. (9) mit $u = 1$ folgt

$$F(v) = \operatorname*{Res}_{w=0} \left\{ \frac{1}{w} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\nu m} \cdot w^\nu}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})}\right) \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} v^{\frac{kl}{2}\mu(\mu-1)} w^{-\mu} \right\}. \tag{11}$$

In der zweiten Reihe liefern die Glieder mit negativem Index keinen Beitrag zum Residuum; sie ergänzen die Reihe nur zu einer bekannten elliptischen

Thetafunktion. — Nach EULER gilt

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-w\cdot v^{kn+m})^{-1}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{v^{\nu m}\cdot w^{\nu}}{(1-v^{k})(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})}$$

für $|v|<1$ und $|w|<|v|^{-m}$. Man erhält diese Identität, indem man zeigt, daß beide Seiten der Funktionalgleichung (8) mit $l=0$ genügen mit w an Stelle von u. Setzen wir

$$\text{(12)}\qquad\begin{cases} H(w,z)=\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1-w\cdot e^{-(kn+m)z})^{-1},\\ \Theta(w,z)=\sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{kl}{2}\mu(\mu-1)z}w^{-\mu}\end{cases}$$

für $\Re(z)>0$, $0<|w|<e^{m\Re(z)}$, so wird nach Gl. (11), wenn wir unter $\mathfrak{R}$ einen im positiven Sinne durchlaufenen Kreis um den Nullpunkt mit einem Radius $\varrho<1$ verstehen, auf Grund des CAUCHYschen Integralsatzes

$$\text{(13)}\qquad F(e^{-z})=f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}}H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w}.$$

Wir wählen noch

$$\text{(14)}\qquad \varrho=1-\alpha_l,$$

wobei $\alpha_l>0$ und $(\alpha_l)^l+\alpha_l-1=0$ ist. Offenbar ist $0<\varrho<1$.

Um den Satz 2 zu beweisen, zeigen wir, daß $f(z)$ die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Nach Gl. (10) ist die Reihe

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}r(n)\,e^{-nz}$$

für $\Re(z)>0$ konvergent; die Koeffizienten $r(n)$ sind nach Gl. (9) reelle Zahlen. — Um auch die Voraussetzungen b) und c) als erfüllt nachzuweisen, müssen wir, um die Beziehung (13) benutzen zu können, nach dem Verhalten der Funktionen $H(w,z)$ und $\Theta(w,z)$ auf dem Kreis $\mathfrak{R}$ für $\Re(z)\to 0$ fragen. Hierüber gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz. *Es sei $w=\varrho\,e^{i\varphi}$ mit $-\pi<\varphi\leqq+\pi$, ϱ nach Gl. (14) und $z=x+iy$, $x>0$. Dann gilt für $x\to 0$, $|y|\leqq x^{\frac{3}{4}}$ gleichmäßig in y und φ*

$$\text{(15)}\qquad H(w,z)=e^{\frac{1}{kz}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{w^r}{r^2}+\left(\frac{m}{k}-\frac{1}{2}\right)\log(1-w)+O\left(x^{\frac{1}{4}}\right)}$$

und

$$\text{(16)}\qquad \Theta(w,z)=\sqrt{\frac{2\pi}{klz}}\,e^{\frac{\log^2 w}{2klz}-\frac{1}{2}\log w}\cdot\left(1+O\left(e^{-\frac{c_0}{x}(\pi-|\varphi|)+c_1x^{-\frac{1}{2}\frac{3}{4}}}+x\right)\right).$$

Es bedeuten hierbei c_0 und c_1, wie auch im folgenden $c_2, c_3, \dots$ stets geeignet wählbare positive Konstanten, die eventuell noch von k, l und m abhängen.

Beweis des Hilfssatzes. Aus Gl. (12) erhält man

$$\log H(w,z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+m)z \cdot r}. \tag{17}$$

Durch Anwendung der inversen MELLIN-Transformation folgt

$$\log H(w,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} (kz)^{-s} \Gamma(s) \zeta\left(s, \frac{m}{k}\right) D(s+1, w)\, ds \tag{18}$$

Hier ist

$$\zeta\left(s, \frac{m}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{m}{k}\right)^{-s} \qquad (s = \sigma + it)$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Die Funktion $\zeta\left(s, \frac{m}{k}\right)$ ist in die ganze s-Ebene analytisch fortsetzbar und dort überall regulär bis auf die Stelle $s=1$, wo ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 vorliegt. Ferner ist

$$D(s,w) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r^s}$$

für festes w mit $|w|<1$ eine ganze Funktion von s. Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{cases} \Gamma(\sigma+it) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{c_2}\right), \\ \zeta\left(\sigma+it, \frac{m}{k}\right) = O\left(|t|^{c_3}\right) \quad \text{und} \\ D(\sigma+it, w) = O(1) \end{cases} \tag{19}$$

für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in σ in jedem festen Vertikalstreifen $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$. Wegen $|y| \leq x^{\frac{3}{4}}$ ist für $x \leq 1$ sicher $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$, also

$$z^{-\sigma-it} = O\left(|z|^{-\sigma} e^{\frac{\pi}{4}|t|}\right) \tag{20}$$

für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in σ. Aus (19) und (20) folgt in bekannter Weise, daß die Integrationsgerade im Integral (18) verschoben werden kann, wobei dann die Residuen des Integranden im überstrichenen Vertikalstreifen auftreten. Mit

$$\zeta\left(0, \frac{m}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{m}{k}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Pole bei $s=0$ und $s=1$ daher

$$\log H(w,z) = \frac{1}{kz} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r^2} + \left(\frac{m}{k} - \frac{1}{2}\right) \log(1-w) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (kz)^{-s} \Gamma(s) \zeta\left(s, \frac{m}{k}\right) D(s+1, w)\, ds.$$

Mit Hilfe der Abschätzungen (19) und (20) erhält man wegen

$$|z|^{\frac{1}{2}} = O(x^{\frac{1}{2}})$$

die Formel

$$\log H(w,z) = \frac{1}{k\,z}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{w^r}{r^2} + \left(\frac{m}{k}-\frac{1}{2}\right)\log(1-w) + O(x^{\frac{1}{2}})$$

für $x \to 0$ gleichmäßig in y und $\varphi = \arg w$, woraus (15) folgt.

Zum Beweis von (16) gehen wir aus von der bekannten Transformationsformel ([3], S. 78)

$$(21)\qquad \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\mu^2-\beta\mu} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\cdot\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2\mu^2}{\alpha}-\frac{\pi i\beta}{\alpha}\mu}$$

für $\Re(\alpha) > 0$, die man durch Anwendung der Poissonschen Summationsformel erhalten kann. Setzt man

$$\alpha = \frac{k\,l}{2}z \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{k\,l}{2}z + \log w,$$

so liefert (21) die Beziehung

$$(22)\qquad \Theta(w,z) = \sqrt{\frac{2\pi}{k\,l\,z}}\,e^{\frac{1}{2\,k\,l\,z}\left(\log w-\frac{k\,l}{2}z\right)^2}\cdot\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi^2\mu^2}{k\,l\,z}-\frac{2\pi i\mu}{k\,l\,z}\left(\log w-\frac{k\,l}{2}z\right)}.$$

Wegen $|y| \leq x^{\frac{3}{14}}$ ist

$$\frac{1}{2\,k\,l\,z}\left(\log w-\frac{k\,l}{2}z\right)^2 = \frac{\log^2 w}{2\,k\,l\,z}-\frac{1}{2}\log w + O(x) \quad \text{für} \quad x\to 0.$$

Mit $w = \varrho\,e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq +\pi$ gilt für $|\mu| \geq 2$ ferner

$$\Re\left\{\frac{-2\pi^2\mu^2-2\pi i\mu\log w}{k\,l\,z}\right\} = -\frac{2\pi\mu x}{k\,l(x^2+y^2)}\left(\pi\mu-\varphi+\frac{y}{x}\log\varrho\right) \leq -c_4\frac{|\mu|}{x};$$

für $|\mu| = 1$ ist

$$\Re\left\{\frac{-2\pi^2\pm 2\pi i\log w}{k\,l\,z}\right\} \leq \frac{2\pi x(|\varphi|-\pi)}{k\,l(x^2+y^2)} + O\left(\frac{|y|}{x^2}\log\frac{1}{\varrho}\right)$$
$$\leq \frac{2\pi(|\varphi|-\pi)}{k\,l\,x} + O(x^{-\frac{13}{14}}) \quad \text{für} \quad x\to 0$$

gleichmäßig in y und φ. Aus diesen Abschätzungen ergibt sich mit (22) die Behauptung (16), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir wenden nun den Hilfssatz an. Es sei zunächst wieder $|y| \leq x^{\frac{3}{14}}$. Auf Grund der Integraldarstellung (13) ist

$$(23)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho e^{-i\varphi_0}}^{\varrho e^{+i\varphi_0}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w}.$$

Hier ist $\mathfrak{B}$ der Kreis $\mathfrak{K}$ ohne den Bogen von $\varrho\, e^{-i\varphi_0}$ bis $\varrho\, e^{+i\varphi_0}$ und

$$\varphi_0 = x^{\frac{5}{12}} \tag{24}$$

für hinreichend kleines x. Für das zweite Integral in (23) führen wir eine Betragsabschätzung durch. Aus Gl. (17) erkennt man

$$|H(w,z)| \leq H(\varrho, x),$$

nach (15) also

$$H(w,z) = O\left(e^{\frac{1}{kx}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{25}$$

Nach (16) ist für $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Theta(w,z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - \frac{\varphi^2 x}{2kl(x^2+y^2)}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - c_6 x^{-\frac{1}{6}}}\right),$$

oder

$$\Theta(w,z) = O\left(e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - c_7 x^{-\frac{1}{6}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{26}$$

Für das restliche Intervall $\frac{\pi}{2} < |\varphi| \leq \pi$ gilt nach (16) offenbar

$$\Theta(w,z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - \frac{c_8}{x} + c_1 x^{-\frac{13}{24}}}\right) = O\left(e^{\frac{\log^2\varrho - c_9}{2klx}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{27}$$

Aus (25), (26) und (27) folgt unter Berücksichtigung der Gl. (14) mit der Abkürzung

$$A_l = \frac{l}{2}\log^2\alpha_l + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\alpha_l)^{r\cdot l}}{r^2}$$

insgesamt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w} = O\left(e^{\frac{A_l}{kx} - c_7 x^{-\frac{1}{6}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{28}$$

Wir betrachten nun das erste Integral von Gl. (23). Unter Verwendung von (15) und (16) erhalten wir nach der Substitution $w = \varrho\, e^{i\varphi}$ die Abschätzung

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho e^{-i\varphi_0}}^{\varrho e^{+i\varphi_0}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w} = \frac{1}{\sqrt{2\pi klz}}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} e^{\psi(\varphi)+O(x^{\frac{1}{2}})}\,d\varphi, \tag{29}$$

denn es ist sicher

$$1 + O\left(e^{-\frac{c_9}{x}(\pi-\varphi_0)+c_1 x^{-\frac{13}{24}}} + x\right) = 1 + O(x^{\frac{1}{2}}) = e^{O(x^{\frac{1}{2}})} \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

In Gl. (29) wurde gesetzt

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{kz}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r e^{i\varphi r}}{r^2} + \frac{\log^2(\varrho\, e^{i\varphi})}{2l}\right\} - \frac{1}{2}\log\varrho - \frac{1}{2}i\varphi + \left(\frac{m}{k} - \frac{1}{2}\right)\log(1-\varrho\, e^{i\varphi}).$$

Es gilt

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho^r e^{i\varphi r}}{r^2} + \frac{1}{2l}\log^2(\varrho e^{i\varphi}) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho^r}{r^2} + \frac{1}{2l}\log^2\varrho + i\varphi\left\{\frac{1}{l}\log\varrho + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r}\right\} -$$

$$- \frac{\varphi^2}{2}\left\{\frac{1}{l} + \frac{\varrho}{1-\varrho}\right\} + O(|\varphi|^3)$$

$$= A_l - \frac{\varphi^2}{2l}\left(l(\alpha_l)^{l-1} + 1\right) + O(|\varphi|^3),$$

denn nach Gl. (14) ist

$$\frac{1}{l}\log\varrho + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r} = 0.$$

Es folgt mit Gl. (14) insgesamt

$$\psi(\varphi) = \frac{A_l}{kz} - \frac{\varphi^2}{2klz}\left(l(\alpha_l)^{l-1} + 1\right) + \left(\frac{m}{k} - \frac{l+1}{2}\right)\log\alpha_l + O\left(\frac{|\varphi|^3}{|z|}\right) + O(|\varphi|)$$

$$= \frac{A_l}{kz} - \frac{\varphi^2}{2klz}\left(l(\alpha_l)^{l-1} + 1\right) + \left(\frac{m}{k} - \frac{l+1}{2}\right)\log\alpha_l + O(x^{\frac{1}{4}}).$$

Aus (29) wird dann

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi klz}}\, e^{\frac{A_l}{kz} + \left(\frac{m}{k} - \frac{l+1}{2}\right)\log\alpha_l} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} e^{-\frac{\varphi^2}{2klz}\left(l(\alpha_l)^{l-1}+1\right) + O(x^{\frac{1}{4}})}\, d\varphi. \tag{30}$$

Wir setzen vorübergehend

$$\frac{l(\alpha_l)^{l-1}+1}{2kl} = \gamma \quad (>0).$$

Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} e^{-\varphi^2\frac{\gamma}{z} + O(x^{\frac{1}{4}})}\, d\varphi &= \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} e^{-\varphi^2\frac{\gamma}{z}}\, d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} e^{-\varphi^2\frac{\gamma}{z}}\left(e^{O(x^{\frac{1}{4}})} - 1\right) d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{z}{\gamma}} \int_{-\varphi_0\sqrt{\gamma/z}}^{+\varphi_0\sqrt{\gamma/z}} e^{-\xi^2}\, d\xi + O(|\varphi_0|\, x^{\frac{1}{4}}) \\ &= \sqrt{\frac{\pi z}{\gamma}}\left(1 + o(1)\right) + O(x^{\frac{1}{4}}) \\ &= \sqrt{\frac{\pi z}{\gamma}}\left(1 + o(1)\right), \end{aligned}\right. \tag{31}$$

denn, wie man leicht feststellt, strebt der geradlinige Integrationsweg von $-\varphi_0\sqrt{\gamma/z}$ bis $+\varphi_0\sqrt{\gamma/z}$ gegen die volle reelle Achse.

Die Formeln (23), (28), (29), (30) und (31) ergeben die Aussage

$$f(z) = \left(\alpha_l^{l+1-\frac{2m}{k}}\left(l(\alpha)^{l-1}+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{A_l}{kz}} \cdot \left(1 + o(1)\right) \tag{32}$$

für $x \to 0$ und $|y| \leqq x^{\frac{5}{24}}$ gleichmäßig in y.

Die asymptotische Gl. (32) zeigt, daß die Voraussetzung b) von Satz 1 über $f(z)$ erfüllt ist, wenn wir das Gebiet D und die Funktion $\varkappa(x)$ folgendermaßen wählen

$$D: \quad |y| < x; \quad \varkappa(x) = x^{\frac{2l}{2l+1}}; \quad \text{es ist} \quad \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x.$$

Nach (32) ist

$$\chi(z) = \left(\alpha_l^{l+1-\frac{2m}{k}} \left(l(\alpha_l)^{l-1} + 1\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \text{const} > 0 \tag{33}$$

und

$$\varphi(z) = \frac{A_l}{k z}.$$

Die Funktionen $\chi(z)$ und $\varphi(z)$ erfüllen demnach auch alle vor dem Satz 1 ausgesprochenen Bedingungen.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß

$$f(z) = o\left\{\frac{f(x)}{(\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad \text{ist für} \quad x \to 0, \quad x^{\frac{2l}{2l+1}} < |y| \leq \pi$$

gleichmäßig in y. Statt dessen beweisen wir im gleichen Intervall

$$f(z) = O\left(e^{\frac{A}{kx} - c_{10} x^{-\frac{1}{2}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0 \tag{34}$$

gleichmäßig in y, woraus sich die obige Aussage mit Hilfe von (32) und (33) ergibt.

Es sei zuerst

$$\left|y - \frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leq x^{\frac{2l}{2l+1}} \quad \text{für} \quad \lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left[\frac{k}{2}\right].$$

Wir betrachten dann die Funktion

$$f\left(z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} H\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) \Theta\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) \frac{dw}{w}$$

für $x \to 0$, $|y| \leq x^{\frac{2l}{2l+1}}$. Aus Gl. (12) erkennt man

$$H\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) = H\left(w\, e^{-\frac{2\pi i\lambda m}{k}}, z\right)$$

und

$$\Theta\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) = \Theta(w, z).$$

Wir können deshalb wieder den Hilfssatz benutzen. Aus (15) und (16) folgt

$$H\left(w\, e^{-\frac{2\pi i\lambda m}{k}}, z\right) = O\left(e^{\Re\left\{\frac{1}{kz}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\varrho^r e^{ir\left(\varphi - \frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}\right\}}\right)$$

und

$$\Theta(w, z) = O\left(e^{\Re\left\{\frac{1}{2kl_z}\log^2(\varrho e^{i\varphi}) + c_{11} x^{-\frac{1}{2l}}\right\}}\right)$$

für $x \to 0$, $|y| \leqq x^{\frac{33}{24}}$ gleichmäßig in y und φ. Es gilt

$$\Re\left\{\frac{1}{k z}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}\,e^{i r\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}\right\} \leqq \frac{1}{k x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}+\frac{\varrho}{k}\,\Re\left\{\frac{e^{i\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}}{z}-\frac{1}{x}\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{k x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}+\frac{\varrho}{k x}\left\{\frac{\cos\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)+\frac{y}{x}\sin\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}{1+(y^2/x^2)}-1\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{k x}\sum_{r=1}^{2}\frac{\varrho^r}{r^2}+\frac{\varrho}{k x}\left\{\cos\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)-1\right\}+c_{12}\,x^{-\frac{13}{24}}$$

und

$$\Re\left\{\frac{1}{2k l z}\log^2(\varrho\,e^{i\varphi})\right\} \leqq \frac{x(\log^2\varrho-\varphi^2)+2\varphi y\log\varrho}{2k l(x^2+y^2)} \leqq \frac{\log^2\varrho}{2k l x}-\frac{\varphi^2}{2k l x}+c_{13}\,x^{-\frac{13}{24}}.$$

Nun ist

$$\varrho\left(\cos\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)-1\right)-\frac{\varphi^2}{2l} \leqq -c_{14} \quad \text{für alle} \quad \varphi,$$

da $(m, k)=1$ vorausgesetzt war. Es ist also

$$H\left(w\,e^{-\frac{2\pi i\lambda m}{k}}, z\right)\Theta(w, z) = O\left\{e^{\frac{1}{x}\left(\frac{A_l}{k}-c_{14}\right)+c_{15}x^{-\frac{13}{24}}}\right\} = O\left\{e^{\frac{1}{k x}(A_l-c_{16})}\right\}$$

für $x \to 0$, $|y| \leqq x^{\frac{33}{24}}$ gleichmäßig in y und φ. Hieraus folgt für diesen Fall die Abschätzung (34).

Es sei nun

$$x^{\frac{33}{24}} < \left|y-\frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leqq \frac{\pi}{k}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Durch diese Ungleichungen werden alle restlichen Intervalle mit erfaßt. Wir benutzen wieder die Darstellung (13) von $f(z)$. Nach Gl. (12) ist stets

$$|\Theta(w, z)| \leqq \Theta(\varrho, x),$$

also nach (16)

$$\Theta(w, z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{\frac{1}{2k l x}\log^2\varrho}\right)$$

für alle φ und y. Ferner ist nach Gl. (17) offenbar

$$\log|H(w, z)| \leqq \log H(\varrho, x)+\Re\left\{w\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(k n+m)z}\right\}-\varrho\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(k n+m)x}.$$

Für $\left|y-\frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leqq \frac{\pi}{k}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(k n+m)z}=\frac{e^{-mz}}{1-e^{-kz}}=\frac{e^{-2\pi i\frac{\lambda m}{k}}}{k\left(z-\frac{2\pi i\lambda}{k}\right)}+O(1) \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

Mit $y_1 = y - \frac{2\pi\lambda}{k}$ folgt also

$$\Re\left\{w\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+m)z}\right\} - \varrho\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+m)x} \leq \frac{\varrho}{x}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y_1^2}{x^2}}} - 1\right\} + O(1) \leq -c_{17}\, x^{-\frac{1}{12}},$$

da $|y_1| > x^{\frac{3}{24}}$ ist. Aus (15) erhält man somit

$$H(w, z) = O\left(e^{\frac{1}{kx}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2} - c_{17}x^{-\frac{1}{12}}}\right).$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$H(w,z)\,\Theta(w,z) = O\left(e^{\frac{A_l}{kx} - c_{18}x^{-\frac{1}{12}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0, \qquad x^{\frac{3}{24}} < \left|y - \frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leq \frac{\pi}{k},$$

gleichmäßig in y und φ, woraus sich wieder die Abschätzung (34) ableitet.

Es erfüllt demnach die Funktion $f(z)$ alle Voraussetzungen von Satz 1. Aus (33) und (5) erhält man nun nach kurzer Rechnung die asymptotische Gleichung für $r(n)$. Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

§ 3. Beispiele.

1. Wir setzen im Satz 2 die Zahl $k = 1$. In der Entwicklung

$$F(v) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\frac{l}{2}\nu(\nu-1)+m\nu}}{(1-v)(1-v^2)\ldots(1-v^\nu)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_m^{(l)}(n)\cdot v^n$$

ist $h_m^{(l)}(n)$ gleich der Anzahl aller Zerlegungen der Zahl n in natürliche Zahlen $n_i \geq m$, wobei in jeder Zerlegung die Zahlen n_i einen Mindestabstand l besitzen (vgl. [4], S. 289). Dann ergibt der Satz 2 den

Satz 3. *Für $n \to \infty$ gilt*

$$h_m^{(l)}(n) \sim C(1, l, m)\, n^{-\frac{3}{4}}\, e^{2\cdot\sqrt{A_l\cdot n}}$$

mit den Abkürzungen von Satz 2.

Aus der Bedeutung von $C(1, l, m)$ erhält man noch den

Satz 4. *Es seien m_1 und m_2 natürliche Zahlen. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{m_1}^{(l)}(n)}{h_{m_2}^{(l)}(n)} = (\alpha_l)^{m_1 - m_2}.$$

Diese Grenzwerte sind für $l > 1$ algebraische Einheiten.

Bemerkung. Für $l = 2$, $m = 1$ bzw. $= 2$ ist nach einem Satz von ROGERS und RAMANUJAN ([4], S. 289)

$$h_1^{(2)}(n) = r_0(n; 5)$$

und

$$h_2^{(2)}(n) = r_1(n; 5),$$

wobei $r_\nu(n;5)$ die Anzahl aller Partitionen von n in positive quadratische Reste ($\nu=0$) bzw. in Nichtreste ($\nu=1$) modulo 5 ist. In diesem Falle sind die asymptotischen Aussagen in den Sätzen 3 und 4 von [2] bereits enthalten.

2. Wir setzen im Satz 2 die Zahl $l=1$. Dann ist $\alpha_1=\frac{1}{2}$ und $A_1=\frac{\pi^2}{12}$. In der Entwicklung

$$(35)\qquad \begin{cases} F(v)=1+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{v^{\frac{k}{2}\nu(\nu-1)+m\nu}}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})}=\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+v^{kn+m}) \\ \qquad =1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^*(n;k,m)\,v^n \end{cases}$$

bedeutet $q^*(n;k,m)$ die Anzahl aller Zerlegungen der Zahl n in verschiedene natürliche Zahlen $n_i\equiv m \pmod k$ mit $n_i\geq m$ (vgl. [2], Satz 2). Dann liefert der Satz 2 den

Satz 5. *Für $n\to\infty$ gilt*

$$q^*(n;k,m)\sim 2^{-\left(1+\frac{m}{k}\right)}\cdot(3k)^{-\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{4}}e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3k}}}.$$

Bemerkung. Es ist $q^*(n;1,1)=q(n;2,1)$, d.h. gleich der Anzahl aller Zerlegungen der Zahl n in ungerade natürliche Zahlen. Hier ist bekanntlich ([1], S. 1075)

$$q(n;2,1)\sim\frac{1}{4\cdot 3^{\frac{1}{4}}}n^{-\frac{3}{4}}e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}\quad\text{für}\quad n\to\infty.$$

3. Es sei d die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers,

$$(36)\qquad a_n^{(\nu)}=\frac{1}{2}\left\{\chi(n)+(-1)^\nu\left(\frac{d}{n}\right)\right\}\quad\text{für}\quad\nu=0,1,$$

$\chi(n)$ der Hauptcharakter modulo $|d|$ und $\left(\frac{d}{n}\right)$ das KRONECKER-Symbol. Es ist offenbar

$$a_n^{(\nu)}=\begin{cases}1 & \text{für } \left(\frac{d}{n}\right)=(-1)^\nu\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

In der Entwicklung

$$F_\nu(v)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+v^n)^{a_n^{(\nu)}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}r_\nu^*(n;d)\,v^n$$

ist dann $r_\nu^*(n;d)$ gleich der Anzahl aller Partitionen der Zahl n in natürliche Zahlen n_i mit $\left(\frac{d}{n_i}\right)=(-1)^\nu$. Diese Funktion kann nicht mit Hilfe von Satz 2 behandelt werden. Es gilt aber

$$F_\nu(v)=\prod_{m=1}^{|d|-1}\cdot\prod_{n=0}^{\infty}(1+v^{|d|n+m})^{a_m^{(\nu)}}.$$

Deshalb erfüllt die Funktion $F_\nu(e^{-z}) = f_\nu(z)$ die Voraussetzungen des Satzes 1. Aus (32) folgt insbesondere $(k = |d|,\ l = 1)$

$$f_\nu(z) \sim \prod_{m=1}^{|d|-1} 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{|d|}\right) a_m^{(\nu)}} e^{\frac{\pi^2}{12 \cdot |d| \cdot z} \cdot a_m^{(\nu)}}.$$

für $x \to 0$, $|y| \leqq x^{\frac{3}{2}}$ gleichmäßig in y. Ist $\varphi(k)$ die EULERsche Funktion, so gilt nach (36) sicher

$$\sum_{m=1}^{|d|-1} a_m^{(\nu)} = \frac{\varphi(|d|)}{2}$$

und

$$-\frac{1}{|d|} \sum_{m=1}^{|d|-1} m\, a_m^{(\nu)} = -\frac{\varphi(|d|)}{4} - \frac{(-1)^\nu}{2 \cdot |d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} m \cdot \left(\frac{d}{m}\right)$$

$$= -\frac{\varphi(|d|)}{4} + \begin{cases} 0 & \text{für} \quad d > 0 \\ (-1)^\nu \cdot h/w & \text{für} \quad d < 0, \end{cases}$$

wobei h die Klassenzahl und w die Anzahl der Einheitswurzeln des imaginärquadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ bedeutet. Es wird also

$$f_\nu(z) \sim \begin{cases} e^{\frac{\pi^2 \varphi(d)}{24 \cdot d \cdot z}} & \text{für} \quad d > 0 \\ 2^{(-1)^\nu \frac{h}{w}} e^{\frac{\pi^2 \varphi(|d|)}{24 \cdot |d| \cdot z}} & \text{für} \quad d < 0 \end{cases}$$

für $x \to 0$, $|y| \leqq x^{\frac{3}{2}}$ gleichmäßig in y. Aus Satz 1 ergibt sich dann der

Satz 6. *Für $n \to \infty$ gilt*

$$r_\nu^*(n; d) \sim \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\varphi(d)}{6 \cdot d}\right)^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{3}{4}} e^{\pi \sqrt{\frac{\varphi(d)\, n}{6 \cdot d}}} & \textit{für} \quad d > 0 \\ 2^{(-1)^\nu \frac{h}{w}} \left(\frac{\varphi(|d|)}{6 \cdot |d|}\right)^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{3}{4}} e^{\pi \sqrt{\frac{\varphi(|d|)\, n}{6 \cdot |d|}}} & \textit{für} \quad d < 0. \end{cases}$$

Im Vergleich zu den Sätzen 4 und 5 von [2] erhält man noch den

Satz 7.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_0^*(n; d)}{r_1^*(n; d)} = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad d > 0 \\ 2^{\frac{2h}{w}} & \textit{für} \quad d < 0. \end{cases}$$

Literatur.

[1] INGHAM, A. E.: A Tauberian Theorem for Partitions. Ann. of Math. **42**, 1075—1090 (1941). — [2] MEINARDUS, G.: Asymptotische Aussagen über Partitionen. Math. Z. **59**, 388—398 (1954). — [3] WEBER, H.: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891. — [4] HARDY, G. H., and E. M. WRIGHT: An Introduction to the Theorie of Numbers. Oxford 1938.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. August 1954.)

Puppe, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 303—323 (1954)

Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders.

Von
Dieter Puppe.

Einleitung.

Das Homotopieproblem für die Abbildungen eines Polyeders K in einen topologischen Raum Y (der ohne wesentliche Einschränkung als bogenweise zusammenhängend angenommen werden kann) ist nur unter sehr speziellen Voraussetzungen über die Dimension von K und die Homotopiegruppen von Y vollständig gelöst. Insbesondere ist fast nichts über die Abbildungen von K in die m-Sphäre S^m bekannt, wenn die Dimension n von K erheblich größer als m ist[1]). Einen Beitrag zur Behandlung dieses Problems zu liefern, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Dabei leitet uns vor allem folgende Frage:

K sei eine n-dimensionale geschlossene orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, σ_0 ein n-Simplex einer Zerlegung von K und $f_\alpha: K \to S^m$ eine Abbildung, so daß $f_\alpha | K - \sigma_0$ konstant ist und $\alpha \in \pi_n(S^m)$ durch $f_\alpha | \sigma_0$ repräsentiert wird; in welchen Fällen ist f_α wesentlich? Aus $\alpha = 0$ folgt die Nullhomotopie von f_α. Wegen $\pi_n(S^m) = 0$ für $n < m$ kann man sich also auf $n \geq m$ beschränken. Klar ist ferner der Fall $n = m$; dann ist f_α für $\alpha \neq 0$ immer wesentlich, denn der Grad von f_α verschwindet nicht. Falls m gerade, $n = 2m - 1$ und K eine Mannigfaltigkeit ist, so ist f_α wesentlich, wenn die Hopfsche Invariante von α $\gamma(\alpha) \neq 0$ ist, denn dann ist auch die Hopfsche Invariante der Abbildung $f_\alpha: K \to S^m$ von 0 verschieden. Wir werden zeigen, daß diese Behauptung richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung, daß K eine Mannigfaltigkeit ist, fallen läßt, und ferner, daß damit alle Fälle erschöpft sind, in denen man allgemein auf die Wesentlichkeit von f_α schließen kann; d. h. ist weder $n = m$ noch m gerade und $n = 2m - 1$, so gibt es eine n-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit K, für die f_α immer nullhomotop ist, und wenn $n = 2m - 1$ und m gerade ist, dann gibt es ein K, so daß f_α für alle α mit $\gamma(\alpha) = 0$ nullhomotop ist (vgl. Satz 7, wo auch nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeiten berücksichtigt sind).

Dieses Ergebnis stützt sich auf vorhergehende allgemeinere Betrachtungen. In den §§ 1—3 wird die Theorie der „gerüstweisen Fortsetzung" von Deformationen (begründet von Eilenberg [3], in sehr allgemeiner Form behandelt von Olum [9]) unter dem besonderen Gesichtspunkt dargestellt, daß eine Deformation $K \times I \to Y$ als Abbildung von K in den Raum der Wege von Y gedeutet werden kann (Satz 1 und 2). Wir gelangen dabei in einer bestimmten Richtung über die bekannten Tatsachen hinaus und erhalten eine notwendige Bedingung für die Nullhomotopie einer Abbildung, die mit dem

[1]) Genauer: wenn $n > m + 2$ ist; für $n \leq m + 2$ vgl. [1].

Hurewiczschen Homomorphismus $h:\pi_{n-1}(\Omega)\to H_{n-1}(\Omega)$ für den Raum Ω der geschlossenen Wege in Y mit festem Anfangspunkt zusammenhängt (vgl. Satz 3 und die anschließende Bemerkung 1). In § 4 wird der Fall betrachtet, daß K eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Hier zeigt sich eine gewisse Umkehrbarkeit von Satz 3 (vgl. Satz 4), und Satz 5 gibt auf unsere Ausgangsfrage eine allgemeine Antwort (statt S^m kann ein beliebiger bogenweise zusammenhängender Raum Y stehen), in der wieder der Homomorphismus $h:\pi_{n-1}(\Omega)\to H_{n-1}(\Omega)$ eine Rolle spielt. Die Untersuchungen von SERRE in [11], [12] über die Homotopie- und Homologiegruppen der Wegeräume von Sphären (vgl. Satz 6) gestatten es, in § 5 hieraus die bereits oben genannten Ergebnisse für $Y=S^m$ zu folgern (Satz 7).

In [5], [6] hat HOPF bewiesen, daß für gerades m jede $(2m-1)$-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit wesentlich auf die m-Sphäre S^m abgebildet werden kann. Er hat die Frage gestellt, ob das auch für allgemeinere Polyeder an Stelle der Mannigfaltigkeiten gilt. Wir können diese Frage bejahen (Satz 8), und zwar unter anderem für alle $(2m-1)$-dimensionalen Polyeder mit nicht verschwindender Bettischer Zahl der Dimension $2m-1$. Dagegen gibt es für jedes n mit $m<n<2m-1$ oder $n=2m-1$ und $m=$ ungerade eine n-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, die sich in keiner Weise wesentlich auf S^m abbilden läßt (Satz 9).

§ 1. Charakterisierung von Abbildungen durch Koketten.

Wir betrachten einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K — er darf unendlich sein und unendliche Dimension haben — sowie einen beliebigen bogenweise zusammenhängenden Raum Y, in dem wir einen Punkt y_0 auszeichnen. Unter der konstanten Abbildung eines Raumes in Y verstehen wir immer die Abbildung, die alles in y_0 überführt. K^r sei das r-dimensionale Gerüst von K. Eine Abbildung von K oder eines Teilraumes, die auf K^r konstant ist, heiße r-konstant. I sei das Einheitsintervall der reellen Zahlen.

Eine Deformation relativ K^0 der konstanten Abbildung $K\to y_0$ in sich ist eine Abbildung $F: K\times I\to Y$ mit $F(K\times\partial I\cup K^0\times I)=y_0$ [2]). Ist für ein gewisses $n>1$ eine solche Homotopie auf K^{n-1} gegeben, F also auf $K\times\partial I\cup K^{n-1}\times I$ definiert, so ist sie im allgemeinen nicht auf K^n fortsetzbar; sondern notwendig und hinreichend dafür ist das Verschwinden der n-dimensionalen Kokette $c(F)$ von K, die man erhält, indem jedem orientierten n-Simplex σ von K das durch $F|\partial(\sigma\times I)$ [2]) repräsentierte Element von $\pi_n(Y, y_0)$ zugeordnet wird. Dabei sei als Grundpunkt auf der Urbildsphäre $\partial(\sigma\times I)$ irgendeine Ecke $(e, 0)$ von $\sigma\times 0$ gewählt und die Orientierung so, daß die kanonische Abbildung $\sigma\to\sigma\times 0$ orientierungserhaltend ist. Für n-einfaches Y ordnet sich diese Definition dem von EILENBERG [3] eingeführten Begriff des Hinderniskozykels unter. Wir bezeichnen die Menge aller Koketten von K mit Koeffizienten aus

[2]) Üblicherweise ist ∂ der Randoperator in einer Kettengruppe. In dieser Arbeit soll jedoch auch der Rand einer (abgeschlossenen) Zelle z, aufgefaßt als Teilraum von z, mit ∂z bezeichnet werden. Ferner werden wir häufig für ein Simplex als topologischen Raum einerseits und als Kette andererseits dasselbe Zeichen verwenden.

$\pi_n(Y)$, die man in dieser Weise als Hindernisse für Deformationen erhält, mit $C^n_*(K, \pi_n(Y))$. Diese Menge wird in § 2 näher untersucht werden. Sie spielt für das Homotopieproblem eine entscheidende Rolle.

Einer $(n-1)$-konstanten Abbildung $f: K^n \to Y$ ordnen wir die n-dimensionale Kokette $d(f)$ von K mit Koeffizienten aus $\pi_n(Y, y_0)$ zu, deren Wert auf σ durch $f|\sigma: (\sigma, \dot{c}\sigma) \to (Y, y_0)$ gegeben ist. Man kann so jede Kokette erhalten, und die Homotopieklasse von f relativ K^{n-1} ist durch $d(f)$ charakterisiert. $d(f)$ ist genau dann ein Kozykel, wenn f auf K^{n-1} fortsetzbar ist; denn für ein $(n+1)$-Simplex σ' wird $\delta d(f)(\sigma') = d(f)(\partial\sigma')$ durch $f|\partial\sigma'$ repräsentiert[3]), und die Nullhomotopie dieser Abbildung für jedes σ' ist gleichbedeutend mit der Fortsetzbarkeit von f auf K^{n+1}.

Seien f und g zwei $(n-1)$-konstante Abbildungen $K^n \to Y$. Nehmen wir an, daß die Homotopie $f \sim g$ rel. K^0 gilt und durch die Deformation $F: K^n \times I \to Y$ bewirkt wird. Dann ist insbesondere $F|\dot{c}(\sigma \times I)$ für jedes n-Simplex σ auf ganz $\sigma \times I$ fortsetzbar, also nullhomotop. Andererseits repräsentiert $F|\partial(\sigma \times I)$ die Summe dreier Elemente von $\pi_n(Y, y_0)$, die durch folgende Abbildungen von $\dot{c}(\sigma \times I)$ in Y gegeben sind (Grundpunkt und Orientierung wie oben):

1. $(x,t) \to \begin{cases} f(x) & \text{für } t = 0 \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases}$

2. $(x,t) \to \begin{cases} g(x) & \text{für } t = 1 \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases}$

3. $F'|\partial(\sigma \times I)$, wobei $F': K \times \partial I \cup K^{n-1} \times I \to Y$ durch

$$F'(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{für } x \in K^{n-1} \\ y_0 & \text{für } t = 0 \text{ oder } 1 \end{cases}$$

definiert ist.

Die erste Abbildung repräsentiert dasselbe Element von $\pi_n(Y, y_0)$ wie $f|\sigma$, die zweite bis auf Vorzeichenumkehr (denn die kanonische Abbildung $\sigma \to \sigma \times 1 \subset \dot{c}(\sigma \times I)$ kehrt die Orientierung um) dasselbe wie $g|\sigma$. Also folgt

$$d(f) - d(g) + c(F') = 0$$

d.h.

$$d(g) - d(f) \in C^n_*(K, \pi_n(Y)).$$

Setzen wir umgekehrt von f und g nur die letzte Beziehung voraus — die Deformation der konstanten Abbildung auf K^{n-1}, die das entsprechende Element von C^n_* liefert, möge wieder F' heißen —, so definieren wir F auf $K^{n-1} \times I \cup K^n \times \partial I$ durch

$$F(x,t) = \begin{cases} F'(x,t) & \text{für } x \in K^{n-1} \\ f(x) & \text{für } t = 0 \\ g(x) & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

[3]) Das ist ein spezieller Fall des „Homotopieadditionssatzes" und folgt (ebenso wie der allgemeine Satz selbst) unmittelbar aus der Lefschetzschen Definition der Addition in $\pi_n(Y, y^0)$ (vgl. [8], S. 170ff.).

$F|\partial(\sigma\times I)$ repräsentiert dann wieder die Summe der Klassen der obigen Abbildungen 1. bis 3., d.h. den Wert von $d(f)-d(g)+c(F')$ an der Stelle σ. Da dieser Wert nach Voraussetzung verschwindet, ist $F|\partial(\sigma\times I)$ nullhomotop, F läßt sich also auf ganz $K^n\times I$ erweitern und liefert $f\sim g$ rel. K^0. Damit ist gezeigt:

Hilfssatz 1. *Zwei Abbildungen $f, g: K^n\to Y$ mit $f(K^{n-1})=g(K^{n-1})=y_0$ $(n>1)$ sind genau dann homotop relativ K^0, wenn $d(g)-d(f)\in C^n_*\left(K, \pi_n(Y)\right)$ ist.*

In bekannter Weise definiert man Operationen der Elemente von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $\pi_n(Y, y_0)$. Etwas Analoges soll hier für die Menge der Homotopieklassen relativ K^{n-1} von $(n-1)$-konstanten Abbildungen $f: K^n\to Y$ an Stelle von $\pi_n(Y, y_0)$ durchgeführt werden, um auf diesem Wege die freien Deformationen solcher Abbildungen zu untersuchen. Ist w ein in y_0 beginnender und endender Weg in Y, so erklären wir eine neue Abbildung $w\cdot f: K^n\to Y$ folgendermaßen:

Für jedes n-Simplex σ von K und jedes $t\in I$, sei σ_t das in σ konzentrisch und ähnlich gelegene Simplex, dessen Linearausdehnungen sich von denen von σ um den Faktor $1-\frac{t}{2}$ unterscheiden. m_σ sei der gemeinsame Mittelpunkt, und die Hilfsabbildungen $\lambda_t: \sigma_t\to\sigma$ und $\chi_t: (\sigma-\sigma_t)\to I$ seien so erklärt:

1. λ_t ist die affine Streckung von σ_t auf σ.

2. χ_t bildet den in $\sigma-\sigma_t$ liegenden Teil jedes von m_σ ausgehenden Strahls linear auf das Teilintervall $[1-t, 1]$ von I ab, und zwar so, daß $\dot{c}\sigma$ in $1-t$ und $\partial\sigma_t$ in 1 übergeht.

Dann wird definiert

$$f_t(x)=\begin{cases} f\lambda_t(x) & \text{für} \quad x\in\sigma_t \\ w\chi_t(x) & \text{für} \quad x\in\sigma-\sigma_t \end{cases}$$

und

$$f_1=w\cdot f.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß f und $w\cdot f$ frei homotop sind, nämlich vermöge f_t. Offenbar ist $w\cdot f\simeq w'\cdot f'$ rel. K^{n-1}, wenn $w\simeq w'$ und $f\simeq f'$ rel. K^{n-1} gilt, also wird tatsächlich eine Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf die Abbildungsklassen induziert. Nach der Definition der Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $\pi_n(Y, y_0)$ (LEFSCHETZ [8] S. 173f.) ist ferner klar, daß

$$d(w\cdot f)=w\cdot d(f)\ ^4)$$

gilt.

Wir wenden uns nun dem Problem der freien Homotopie von zwei $(n-1)$-konstanten Abbildungen $f, g: K^n\to Y$ zu: Sei $f\sim g$ und $F: K^n\times I\to Y$ die Deformation. Für einen festen Punkt $x_0\in K^0$ definiert die Abbildung $t\to F(x_0, t)$ einen gewissen Weg w in Y. Deformieren wir g weiter in $w\cdot g$ (wie oben angegeben), so beschreibt x_0 bei der ganzen Deformation von f in $w\cdot g$ den aus w und dem Inversen von w zusammengesetzten Weg, also einen nullhomotopen. Bezeichnen wir mit $G: K^n\times I\to Y$ die ebengenannte Homo-

---

4) Die Kokette $w\cdot d(f)$ ist definiert durch: $(w\cdot d(f))(\sigma)=$ Bildelement von $d(f)(\sigma)\in\pi_n(Y, y^0)$ bei der Anwendung von w.

topie von f in $w \cdot g$, so kann man G auf $K^0 \times I \cup K^n \times \partial I$ so deformieren, daß es über $K^n \times \partial I$ unverändert bleibt und die Endabbildung auf $K^0 \times I$ konstant ist. Diese Deformation läßt sich auf ganz $K^n \times I$ fortsetzen; denn $(K^0 \times I \cup K^n \times \partial I) \times I \cup K^n \times I \times 0$ ist Retrakt von $K^n \times I \times I$. Die Endabbildung ist eine Homotopie von f in $w \cdot g$ relativ K^0 [5]), nach Hilfssatz 1 gilt also $d(w \cdot g) - d(f) \in C^n_*$.

Ist umgekehrt diese Relation für f und g und einen geeigneten Weg w vorausgesetzt, so folgt nach Hilfssatz 1 $w \cdot g \sim f$ rel. K^0, und wegen $w \cdot g \sim g$ ist $g \sim f$. Wir haben also:

Hilfssatz 2. *Zwei Abbildungen $f, g: K^n \to Y$ mit $f(K^{n-1}) = g(K^{n-1}) = y_0$ $(n > 1)$ sind genau dann frei homotop, wenn es einen Weg w gibt, so daß $w \cdot d(g) - d(f) \in C^n_*(K, \pi_n(Y))$ ist.*

Ist Y n-einfach im Sinne von EILENBERG, so wirken die Wege in $\pi_n(Y, y_0)$ als Identität; dann fällt der Begriff der Homotopie relativ K^0 mit dem der freien Homotopie zusammen.

Interessiert man sich nur für die Nullhomotopie einer Abbildung f, so ist der Unterschied zwischen freien Deformationen und solchen relativ K^0 ebenfalls unwesentlich. Setzt man nämlich $g = y_0$ konstant, so ist $w \cdot d(g) = 0$ für jedes w, und es folgt:

Hilfssatz 3. *$f: K^n \to Y$ mit $f(K^{n-1}) = y_0$ $(n > 1)$ ist genau dann nullhomotop, wenn $d(f) \in C^n_*(K, \pi_n(Y))$ ist.*

§ 2. Untersuchung von C^n_*.

Die Hilfssätze 1 bis 3 des vorigen Paragraphen gewinnen dann Bedeutung, wenn man die Teilmengen $C^n_*(K, \pi_n(Y))$ der entsprechenden Kokettengruppe kennt. Um uns diesem Ziel zu nähern, gehen wir zu einer anderen Deutung von C^n_* über. Zunächst einige Vorbereitungen:

Sei Ω der Raum der in y_0 beginnenden und endenden nullhomotopen Wege von Y, d.h. die Menge der relativ ∂I nullhomotopen Abbildungen $w: I \to Y$ mit $w(\partial I) = y_0$, versehen mit der „kompakt-offenen" Topologie; das ist die gröbste Topologie, in der die Menge $\{w \mid w(C) \subset O\}$ für jedes kompakte $C \subset I$ und jedes offene $O \subset Y$ offen ist. Bei dieser Topologie ist eine Abbildung $\varphi: X \to \Omega$ genau dann stetig, wenn es die durch $F(x, t) = \varphi(x)(t)$ definierte Abbildung $F: X \times I \to Y$ ist. In Ω ist in natürlicher Weise eine „Multiplikation" $u \vee v$ mit

$$(u \vee v)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{für } t \leqq \frac{1}{2} \\ v(2t-1), & \text{für } t \geqq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ein zu einem gegebenen Element u „inverses" u^- mit

$$u^-(t) = u(1-t)$$

[5]) Dieser Schluß zeigt allgemein: Für 1-konstante Abbildungen eines zusammenhängenden Komplexes K ist Homotopie relativ K^0 mit der Existenz einer Deformation gleichbedeutend, bei der mindestens eine (und infolgedessen jede) Ecke von K einen nullhomotopen Weg beschreibt.

und ein „neutrales Element" w_0 mit

$$w_0(t) = y_0 \quad \text{für alle} \quad t$$

definiert. Entsprechend setzen wir für zwei Abbildungen $\varphi, \psi: X \to \Omega$

$$(\varphi \vee \psi)(x) = \varphi(x) \vee \psi(x)$$

$$\varphi^-(x) = (\varphi(x))^-$$

und bezeichnen eine Abbildung, die alles in w_0 überführt, ebenfalls mit w_0.

Wie SERRE in [11] S. 477ff. zeigt, ist Ω in allen Dimensionen einfach, d.h. eine Abbildung einer r-Sphäre in Ω bestimmt eindeutig ein Element von $\pi_r(\Omega)$, ohne daß auf einen festen Grundpunkt Bezug genommen werden muß. Ferner gilt:

Hilfssatz 4. *Sind φ und ψ Repräsentanten von α bzw. $\beta \in \pi_r(\Omega)$, so wird $\alpha+\beta$ durch $\varphi \vee \psi$ und $(-\alpha)$ durch φ^- repräsentiert.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß φ und ψ Abbildungen von I^r in Ω sind, die $\dot{\in} I^r$ in w_0 überführen. Die Addition in $\pi_r(\Omega)$ wird dann induziert durch folgende „Addition" der Abbildungen:

$$(\varphi + \psi)(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \begin{cases} \varphi(2x_1, x_2, \ldots, x_r) & \text{für} \quad x_1 \leqq \frac{1}{2} \\ \psi(2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_r) & \text{für} \quad x_1 \geqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man bestätigt die folgenden Homotopien relativ ∂I^r:

$$\varphi \vee \psi \sim (\varphi + w_0) \vee (w_0 + \psi) = (\varphi \vee w_0) + (w_0 \vee \psi) \simeq \varphi + \psi,$$

d.h. $\varphi \vee \psi$ repräsentiert tatsächlich $\alpha+\beta$. Insbesondere gilt $\varphi + \varphi^- \sim \varphi \vee \varphi^-$, und aus der Bedeutung von $\varphi \vee \varphi^-$ ergibt sich $\varphi \vee \varphi^- \sim w_0$, d.h. φ^- repräsentiert $(-\alpha)$.

Hilfssatz 5. *Für $r \geq 1$ ist $\pi_r(\Omega) \cong \pi_{r-1}(Y, y_0)$, und zwar kann ein Isomorphismus dadurch hergestellt werden, daß für ein $(r+1)$-Simplex σ, in dem eine Ecke e ausgezeichnet sei, jeder Abbildung $\gamma: \partial\sigma \to \Omega$ mit $\gamma(e) = w_0$ die Abbildung $G: \partial(\sigma \times I) \to Y$ zugeordnet wird, die durch*

$$G(x,t) = \begin{cases} \gamma(x)(t) & \text{für} \quad x \in \partial\sigma \\ y_0 & \text{für} \quad t = 0 \quad \text{oder} \quad 1 \end{cases}$$

definiert ist. Grundpunkt auf $\partial(\sigma \times I)$ ist dabei $(e, 0)$ [6]).

Beweis. Es ist klar, daß man auf diese Weise jedenfalls eine eindeutige Abbildung der Homotopieklassen erhält. Daß sie auch linear ist, folgt sehr einfach unter Benutzung der LEFSCHETZschen Definition der Addition (vgl. [8] S. 170ff.). Sind nämlich zwei Abbildungen $\gamma, \gamma': \partial\sigma \to \Omega$ auf disjunkte „Inseln" (r-dimensionale Teilvollkugeln von $\partial\sigma$) konzentriert, so sind es auch die zu-

[6]) Man kann unter Verwendung von Würfeln als Urbilder einen Isomorphismus auf einfachere Weise konstruieren. Wir werden im folgenden aber gerade die angegebene Definition benutzen müssen.

gehörigen Abbildungen $G, G' : \dot{e}(\sigma \times I) \to Y$ auf $(r+1)$-dimensionale Teilvollkugeln von $\dot{e}(\sigma \times I)$, und es ist offenbar gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Zusammensetzung einerseits und den Übergang von γ zu G andererseits vornimmt. Um die eindeutige Umkehrbarkeit zu zeigen, wählen wir eine Deformation Δ_t von $\dot{e}(\sigma \times I)$ in sich, die den Teilraum $\sigma \times \partial I \cup e \times I$ in sich auf den Punkt $(e, 0)$ zusammenzieht. Aus $G \sim 0$ rel. $(e, 0)$ folgt dann $G\Delta_1 \sim 0$ rel. $\sigma \times \dot{e} I - e \times I$ und vermöge $G\Delta_t$ schließlich $G \sim 0$ rel. $\sigma \times \partial I - e \times I$, was mit $\gamma \simeq 0$ rel. e gleichbedeutend ist.

Wir kommen nun zur Umdeutung von $C^n_*\big(K, \pi_n(Y)\big)$. Eine Deformation der konstanten Abbildung von K in Y relativ K^0 kann als Abbildung von K in Ω aufgefaßt werden. Das Problem der Fortsetzung einer solchen Deformation entspricht völlig dem der Fortsetzung der zugehörigen Abbildung in Ω. Ist eine Deformation F auf K^{n-1} gegeben, so gehört zu ihr die durch $\varphi(x)(t) = F(x, t)$ definierte Abbildung $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$. Der Fortsetzung von φ stellt sich der Hinderniskozykel $c(\varphi) \in C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$ (= Kozykelgruppe von K mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ als Koeffizientenbereich) entgegen, dessen Wert auf σ durch $\varphi | \partial\sigma$ repräsentiert wird. Als Grundpunkt auf $\partial\sigma$ kann dieselbe Ecke e von σ wie oben (§ 1) genommen werden, was wegen der Einfachheit von Ω jedoch unwesentlich ist. Daß $c(\varphi)$ tatsächlich ein Kozykel ist, kann man in diesem Falle aus [3] (10.1) entnehmen. Wird $\pi_n(Y, y_0)$ vermöge des in Hilfssatz 5 genannten Isomorphismus mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ identifiziert, so ist klar, daß $c(\varphi) = c(F)$ gilt. Ist umgekehrt $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$ gegeben, so ist ihm eine Deformation F der konstanten Abbildung auf K^{n-1} durch $F(x, t) = \varphi(x)(t)$ für $x \in K^{n-1}$ [und $F(x, 0) = F(x, 1) = y_0$ für alle x] zugeordnet. Im allgemeinen wird zwar F auf K^0 nicht konstant sein, aber zu jedem φ gibt es ein homotopes φ' mit $\varphi'(K^0) = w_0$, das zugehörige F' ist eine Deformation relativ K^0, und es gilt $c(F') = c(\varphi') = c(\varphi)$. Wir fassen dies zusammen:

Hilfssatz 6. *Wird $\pi_n(Y, y_0)$ mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ vermöge Hilfssatz 5 identifiziert, so besteht C^n_* aus allen Elementen der Kozykelgruppe $C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$, die als Hindernisse von Abbildungen $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$ auftreten.*

Die hier genannte Identifikation von $\pi_n(Y, y_0)$ mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ soll für alles Weitere festgehalten werden. Es läßt sich folgern:

Hilfssatz 7. *C^n_* ist Untergruppe der Kozykelgruppe $C^n\big(K, \pi_n(Y)\big) = C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$ und enthält alle Koränder.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 6 und der Beziehung $c(\varphi \vee \psi^-) = c(\varphi) - c(\psi)$, die ihrerseits eine unmittelbare Folge von Hilfssatz 4 ist. Zum Beweise des zweiten Teils nehmen wir an, $c = \delta c'$ sei irgendein Korand in $C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$. Offenbar kann man eine Abbildung $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$ mit folgenden Eigenschaften finden:

1. $\varphi(K^{n-2}) = w_0$.
2. $\varphi | \sigma'$ repräsentiert für jedes $(n-1)$-Simplex σ' das Element $c'(\sigma') \in \pi_{n-1}(\Omega)$.

Dann ist $c(\varphi)(\sigma) = c'(\partial\sigma)$ [3] und weiter $c'(\partial\sigma) = (\delta c')(\sigma) = c(\sigma)$ für jedes σ', folglich $c = c(\varphi) \in C^n_*$ nach Hilfssatz 6, und das war zu zeigen.

§ 3. Allgemeine Ergebnisse.

Hilfssatz 7 erlaubt es, von C^n_* zum kanonischen Bild H^n_* in der Kohomologiegruppe $H^n = H^n\big(K, \pi_n(Y)\big) = H^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$ überzugehen. In § 1 wurde für eine $(n-1)$-konstante Abbildung $f: K^n \to Y$ die Kokette $d(f)$ definiert; ihre Kohomologieklasse sei $\bar{d}(f)$ [7]. Zwei Abbildungen $K \to Y$ heißen n-homotop, wenn ihre Einschränkungen auf K^n homotop sind. Insbesondere heißt $f: K \to Y$ n-nullhomotop, wenn $f|K^n$ nullhomotop ist; das ist gleichbedeutend mit der Existenz einer n-konstanten zu f homotopen Abbildung $f': K \to Y$. Mit diesen Bezeichnungen geben wir den Ergebnissen von § 1 die Form, in der wir sie im folgenden benutzen werden [8]:

Satz 1. *Für $n > 1$ ist eine $(n-1)$-konstante Abbildung $f: K \to Y$ genau dann n-nullhomotop, wenn $\bar{d}(f|K^n) \in H^n_*$ ist.*

Satz 2. *Ist Y n-einfach $(n > 1)$, so induziert die Zuordnung $f \to \bar{d}(f|K^n)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der n-Homotopieklassen von $(n-1)$-konstanten Abbildungen $f: K \to Y$ in die Faktorgruppe H^n/H^n_*. Wenn K höchstens $(n+1)$-dimensional ist, handelt es sich um eine Abbildung auf ganz H^n/H^n_*.*

Beweis. Satz 1 ist eine Umformulierung von Hilfssatz 3. Der erste Teil von Satz 2 folgt aus Hilfssatz 2; für den zweiten Teil genügt es, daß jeder n-Kozykel von K in der Form $d(f|K^n)$ mit $f: K^{n-1} \to Y$, $f(K^{n-1}) = y_0$ darstellbar ist, und das wurde bereits bei der Definition von d (§ 1) gezeigt.

Für H^n_* gilt nun:

Satz 3. *H^n_* liegt im Kern der durch den Hurewiczschen Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ [9] induzierten Abbildung*

$$\tilde{h}: H^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big) \to H^n\big(K, H_{n-1}(\Omega)\big).$$

Beweis. Jedes Element aus H^n_* besitzt als Repräsentanten den Hinderniskozykel $c(\varphi)$ einer geeigneten Abbildung $\varphi: K^{n-1} \to \Omega$. Wir müssen zeigen: Der Kozykel, der einem n-Simplex σ den Wert $h\big(c(\varphi)(\sigma)\big)$ zuordnet, ist ein Korand. Sei $S_{n-1}(\Omega)$ die Gruppe der $(n-1)$-dimensionalen singulären Ketten von Ω und $C_{n-1}(\Omega)$ die Untergruppe der Zykel. $S_{n-1}(\Omega)/C_{n-1}(\Omega)$ ist isomorph mit $\partial S_{n-1}(\Omega)$, und diese Gruppe ist als Untergruppe einer freien Gruppe selbst frei. Daraus folgt, $C_{n-1}(\Omega)$ besitzt in $S_{n-1}(\Omega)$ ein Komplement, und es gibt eine Projektion $\omega: S_{n-1}(\Omega) \to C_{n-1}(\Omega)$. Jedem $(n-1)$-Simplex σ' von K können wir nun die Homologieklasse $\overline{\omega(\varphi|\sigma')}$ zuordnen, von der man einen Repräsentanten dadurch erhält, daß ω auf das singuläre Simplex $\varphi|\sigma'$ angewandt wird. Diese Zuordnung definiert eine $(n-1)$-dimensionale Kokette

[7] Man beachte, daß $\bar{d}(f)$ nicht aus Kozykeln zu bestehen braucht; das ist jedoch der Fall, wenn f auf K^{n+1} fortsetzbar ist, und dann erhalten wir eine Kohomologieklasse im üblichen Sinn.

[8] Der Inhalt der Sätze 1 und 2 ist für sich betrachtet nicht neu (vgl. z. B. OLUM [9]). Der entscheidende Fortschritt liegt in der Heranziehung des Wegeraums Ω. Dadurch erhält man genauere Aussagen über H^n_* (vgl. Satz 3 und 4) und damit Anwendungen der allgemeinen Theorie (vgl. § 5).

[9] $H_{n-1}(\Omega)$ bezeichnet die singuläre Homologiegruppe von Ω.

c' von K. Für sie gilt

$$(\delta c')(\sigma) = c'(\partial\sigma) = \sum_i \overline{\omega(\varphi|\sigma_i)} = \overline{\omega(\varphi|\partial\sigma)} = \overline{(\varphi|\partial\sigma)} = h\big(c(\varphi)(\sigma)\big),$$

und das beweist die Behauptung.

Die Sätze 1 bis 3 bilden die Grundlage für die §§ 4 und 5. Die folgenden Bemerkungen dienen zur Erläuterung dieser Sätze und ihres Zusammenhangs mit bekannten Tatsachen:

1. Um festzustellen, ob eine gegebene Abbildung $f: K \to Y$ nullhomotop ist, kann man versuchen, sie gerüstweise in die konstante Abbildung $K \to y_0$ zu deformieren. Angenommen, man findet (für ein $n > 1$) eine zu f homotope $(n-1)$-konstante Abbildung $f': K \to Y$, d.h. f ist $(n-1)$-nullhomotop. Es ist nicht ohne Weiteres zu entscheiden, ob f dann auch n-nullhomotop ist. Die obigen Sätze liefern eine notwendige Bedingung dafür, nämlich $\bar{d}(f'|K^n) \in H^n_*$ nach Satz 1 und folglich $\tilde{h}\big(\bar{d}(f'|K^n)\big) = 0$ nach Satz 3. Ist also $\tilde{h}\big(\bar{d}(f'|K^n)\big) \neq 0$, so ist f sicher nicht nullhomotop. Anwendungen dieses Kriteriums enthält § 5.

2. Sei $K = K^n$ ein n-dimensionales Polyeder und $\pi_i(Y) = \pi_{i-1}(\Omega) = 0$ für alle $i < n$ $(n > 1)$. Dann ist $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ und folglich auch $\tilde{h}$ in Satz 3 ein Isomorphismus auf, H^n_* verschwindet also. Ferner ist jede Abbildung $K^{n-1} \to Y$ nullhomotop, und daher besitzt jede Homotopieklasse von Abbildungen $K \to Y$ einen $(n-1)$-konstanten Repräsentanten. Satz 2 liefert nun die Hopf-Whitneysche Klassifikation der Abbildungen von K in Y (vgl. [17]):

Die Homotopieklassen der Abbildungen eines n-dimensionalen Polyeders K in einen bogenweise zusammenhängenden Raum Y, dessen Homotopiegruppen von der ersten bis zur $(n-1)$-ten einschließlich verschwinden, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^n\big(K, \pi_n(Y)\big)$.

Ist Y die 2-Sphäre S^2, so ist auch $h: \pi_2(\Omega) \to H_2(\Omega)$, wie sich in § 5 herausstellen wird (Satz 6), ein Isomorphismus auf, folglich verschwindet H^3_*, und aus Satz 2 folgt:

Die Homotopieklassen der Abbildungen eines dreidimensionalen Polyeders $K = K^3$ in S^2, die 2-konstante Repräsentanten besitzen, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^3\big(K, \pi_3(S^2)\big) \cong H^3(K)$.

Das ist ein Teil des Ergebnisses von Pontrjagin [10].

3. Ist Y 1-einfach, d.h. $\pi_1(Y)$ abelsch, so können wir auch für $n = 1$ einer $(n-1)$-konstanten Abbildung $f: K \to Y$ in analoger Weise, wie es oben für größere n geschah, einen Kozykel $d(f|K^n)$ zuordnen; es ist wieder $d(f|K^n)(\sigma)$ dasjenige Element von $\pi_n(Y, y_0)$, das durch $f|\sigma$ repräsentiert wird. Bekanntlich (vgl. z.B. [3] S. 240 Homotopy Theorem I) verschwindet die Kohomologieklasse $\bar{d}(f|K^1)$ genau dann, wenn $f|K^1$ nullhomotop ist. Definieren wir $H^1_* = 0$, so gilt also Satz 2 auch für den zunächst ausgeschlossenen Fall $n = 1$.

4. Sei $\mathfrak{D}$ die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen $K \to Y$ und $\mathfrak{D}_r$ die Teilmenge bestehend aus den Homotopieklassen mit r-konstanten Repräsentanten. Von Y setzen wir Einfachheit in allen Dimensionen voraus.

Wegen des bogenweisen Zusammenhangs von Y ist $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$. Für alle $r > 0$ liefert Satz 2 zusammen mit der obigen Bemerkung 3. eine Abbildung

$$\bar{d}_r : \mathfrak{D}_{r-1} \to H^r / H^r_*,$$

bei der alle Elemente von $\mathfrak{D}_r$ und nur diese in 0 übergehen. Folglich gilt:

Läßt sich $\mathfrak{D}$ so mit einer Gruppenstruktur versehen, daß alle $\mathfrak{D}_r$ Untergruppen und die Abbildungen $\bar{d}_r$ Homomorphismen sind, so ist in der Reihe

$$\cdots \subset \mathfrak{D}_r \subset \mathfrak{D}_{r-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$$

$\mathfrak{D}_{r-1}/\mathfrak{D}_r$ mit dem Bild bei $\bar{d}_r$, also mit einer gewissen Untergruppe von H^r/H^r_* isomorph.

Die Voraussetzung dieses Klassifikationssatzes ist offenbar erfüllt, wenn Y eine topologische Gruppe ist; ferner, wenn Y eine m-Sphäre und K höchstens $(2m-2)$-dimensional ist, was man mit Hilfe der BORSUK-SPANIERschen Kohomotopiegruppen (vgl. [13]) zeigen kann. Diese beiden Fälle behandelte HU [7], ergänzt von CHEN [2]. Es sei hier noch bemerkt, daß die Voraussetzung auch erfüllt ist, wenn Y der Raum der geschlossenen nullhomotopen Wege mit festem Anfangspunkt in irgendeinem topologischen Raum ist. Als Gruppenoperation in $\mathfrak{D}$ nehme man die durch $(\varphi, \psi) \to \varphi \vee \psi$ induzierte.

§ 4. Pseudomannigfaltigkeit als Urbildraum.

In diesem Paragraphen nehmen wir an, daß K eine n-dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit ist. Soll der Orientierbarkeitscharakter festgelegt sein, so schreiben wir K_+ oder K_-, je nachdem ob die Pseudomannigfaltigkeit orientierbar ist oder nicht. Für eine beliebige abelsche Gruppe G ist $H^n(K_+, G)$ mit G und $H^n(K_-, G)$ mit $G/2 \cdot G$ in natürlicher Weise isomorph — man ordne einem Element $g \in G$ denjenigen Kozykel zu, der auf einem festen Simplex σ_0 den Wert g hat und sonst verschwindet —, und der Isomorphismus ist eindeutig bestimmt, wenn man K_+ und damit $\sigma_0 \subset K_+$ als in bestimmtem Sinn orientiert voraussetzt. Wir identifizieren auf diese Weise $H^n(K_+, G)$ mit G und $H^n(K_-, G)$ mit $G/2 \cdot G$. $h : \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ sei wieder der Hurewiczsche Homomorphismus und h_2 der induzierte Homomorphismus der mod 2 reduzierten Gruppen; dann gilt $\tilde{h} = h$ für orientierbares, $\tilde{h} = h_2$ für nichtorientierbares K, und Satz 3 besagt: Jedes Element $\alpha \in H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)) \subset \pi_{n-1}(\Omega)$ liegt im Kern N von h, jedes $\bar{\alpha} \in H^n_*(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)) \subset \pi_{n-1}(\Omega)/2 \cdot \pi_{n-1}(\Omega)$ im Kern N_2 von h_2. Es erhebt sich die Frage, inwieweit diese Aussagen umkehrbar sind. Dazu beweisen wir folgendes Ergebnis, das nachher noch eine Verschärfung erfahren wird:

Satz 4. a) *Für jedes K_+ liegt $H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$ im Kern N von h, und für jedes $\alpha \in N$ gibt es eine orientierbare n-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit K_+ mit $\alpha \in H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$, d.h. es ist*

$$\bigcup_{K_+} H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)) = N.$$

b) *Das Analoge gilt für die nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeiten* K_- *in bezug auf den Kern* N_2 *von* h_2, *d.h.*

$$\bigcup_{K_-} H_*^n\left(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)\right) = N_2.$$

Beweis. Jeweils der erste Teil der beiden Behauptungen a) und b) ist schon vorher als richtig nachgewiesen worden. Für die zweiten Teile wird ein Hilfssatz benötigt:

Hilfssatz 8. *Entsteht* $\overline{X}$ *dadurch aus dem endlichen Polyeder* X *mit der simplizialen Zerlegung* L, *daß gewisse Paare von Simplexen aus* L *durch nichtausgeartete affine Abbildungen identifiziert werden, dann geht die dritte Normalunterteilung* L_3 *von* L *bei der kanonischen Projektion* $\pi: X \to \overline{X}$ *in eine simpliziale Zerlegung* $\overline{L}_3$ *von* $\overline{X}$ *über.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest: Ist x mittlerer Punkt eines Simplexes σ_1 aus der ersten Normalunterteilung L_1 von L, so gibt es keinen zweiten Punkt $x' \in \sigma_1$ mit $\pi(x) = \pi(x')$. Bedeutet nämlich σ das Simplex niedrigster Dimension aus L mit $\sigma_1 < \sigma$, so würde aus $\pi(x) = \pi(x')$ folgen: Es gibt eine nichtausgeartete affine Abbildung l von σ mit $x' = l(x)$. Eine solche Abbildung ist aber auf σ_1 entweder die Identität, oder sie ist keine Selbstabbildung, d.h. $l(x) = x$ oder $l(x) \notin \sigma_1$.

Daraus ergibt sich, daß π auf jedem Simplex σ_2 der zweiten Normalunterteilung L_2 topologisch ist, und zwar wie folgt: Sind x, x' zwei beliebige Punkte von σ_2 und sind σ_1, σ_1' die Simplexe kleinster Dimension aus L_1 mit $x \in \sigma_1$, $x' \in \sigma_1'$, so ist σ_1 mit σ_1' inzident; denn σ_2 enthält nur mittlere Punkte von den Simplexen aus L_1, deren Mittelpunkte die Ecken von σ_2 bilden, und diese sind alle paarweise inzident. Sei etwa σ_1' Seite von σ_1; dann ist $x, x' \in \sigma_1$ und x sogar mittlerer Punkt, folglich $\pi(x) \neq \pi(x')$. L_2 geht also bei π in eine Zerlegung von $\overline{X}$ in topologische Simplexe über. Für die dritte Normalunterteilung L_3 von L gilt darüber hinaus, daß der Durchschnitt zweier topologischer Simplexe $\pi(\sigma_3)$, $\pi(\sigma_3')$ entweder leer ist oder genau aus einer gemeinsamen Seite besteht. L_3 definiert demnach eine simpliziale Zerlegung $\overline{L}_3$ von $\overline{X}$.

Nachdem so der Hilfssatz bestätigt ist, wenden wir uns wieder dem Beweis von Satz 4 zu. Wird α durch $\psi_0: \partial\sigma_0 \to \Omega$ repräsentiert, so bedeutet $\alpha \in N$, daß der singuläre Zykel $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ in Ω nullhomolog ist; und daß die Klasse mod 2 $\overline{\alpha} \in N_2$ ist, besagt: $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ ist nullhomolog mod 2. Es gibt also eine singuläre n-Kette, die wir in der Form $-\sum_{i=1}^{r} (\psi_i, \sigma_i)$ mit $\psi_i: \sigma_i \to \Omega$ annehmen, so daß ihr Rand gleich $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ bzw. kongruent $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ mod 2 ist. Wir benutzen dabei geordnete singuläre Simplexe (vgl. [4]), d.h. die Ecken der euklidischen Urbilder sind geordnet und zwei singuläre Simplexe (χ, σ) und (χ', σ') sind genau dann gleich, wenn die ordnungserhaltende Affinität von σ auf σ' χ in χ' transformiert. Die σ_i (einschließlich σ_0) können als disjunkte euklidische Simplexe vorausgesetzt werden. Sei X der aus ihnen durch Vereinigung entstehende Raum und L seine natürliche simpliziale Zerlegung. $\psi: (X - \mathring{\sigma}_0) \to \Omega$ ($\mathring{\sigma}_0$ bezeichnet das Innere von σ_0) wird definiert durch $\psi|\sigma_i = \psi_i$, $\psi|\partial\sigma_0 = \psi_0$.

Ferner wählen wir ein n-Simplex σ_0' der dritten Normalunterteilung von σ_0 und setzen ψ noch auf $X - \mathring{\sigma}_0'$ fort. Dann ist auch $\psi|\partial\sigma_0'$ ein Repräsentant von α. Die singuläre Kette $\sum_{i=0}^{r} (\psi|\partial\sigma_i)$ ist gleich 0 bzw. kongruent 0 mod 2. In beiden Fällen läßt sich die Menge aller $(n-1)$-Simplexe von L so in disjunkte Paare (τ, τ') einteilen, daß $\psi|\tau$ und $\psi|\tau'$ als singuläre Simplexe gleich sind; d.h. die ordnungserhaltende affine Abbildung $l: \tau \to \tau'$ läßt ψ invariant: $\psi l = \psi$ auf τ. Im ersten Fall ($\alpha \in N$) kann man darüber hinaus erreichen, daß die Inzidenzzahlen von τ und τ' mit den zugehörigen n-Simplexen entgegengesetzt gleich sind. Wird für jedes Paar (τ, τ') τ mit τ' durch l identifiziert, so entsteht aus L nach Hilfssatz 8 ein rein n-dimensionaler simplizialer Komplex $\overline{L}_3$, in dem jedes $(n-1)$-Simplex mit genau zwei n-Simplexen inzident ist. Im Fall $\alpha \in N$ sind die n-Simplexe außerdem kohärent orientierbar. Nach Konstruktion induziert ψ eine eindeutige Abbildung $\overline{\psi}: (\overline{L}_3 - \mathring{\overline{\sigma}}_0') \to \Omega$. Die mit $\overline{\sigma}_0'$ verbindbaren n-Simplexe von $\overline{L}_3$ (zusammen mit ihren Seiten) bilden einen Teilkomplex K, der eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Für $\varphi = \overline{\psi}|K^{n-1}$ gilt

$$c(\varphi)(\sigma) = \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad \sigma = \overline{\sigma}_0' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ($\alpha \in N$) ist $K = K_+$ orientierbar, folglich $\alpha \in H_*^n\left(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$. Im zweiten Fall ($\overline{\alpha} \in N_2$) kann K orientierbar sein oder nicht. Ist es nichtorientierbar: $K = K_-$, so gilt $\overline{\alpha} \in H_*^n\left(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$; anderenfalls gelangen wir durch eine geringe Abänderung von K und φ zum Ziel: Wir wählen zwei von $\overline{\sigma}_0'$ verschiedene n-Simplexe σ, σ' von K mit der Eigenschaft, daß kein Simplex von K zugleich mit σ und mit σ' Punkte gemeinsam hat — nötigenfalls wird vorher eine Unterteilung der simplizialen Zerlegung von K vorgenommen — und deformieren $\overline{\psi}$ in $\overline{\psi}'$ so, daß $\overline{\psi}'(\sigma) = \overline{\psi}'(\sigma') = w_0$ ist. Entfernt man nun $\mathring{\sigma}$ und $\mathring{\sigma}'$ aus K und identifiziert $\partial\sigma$ mit $\partial\sigma'$ vermöge einer topologischen und simplizialen Abbildung $\partial\sigma \to \partial\sigma'$, die die durch $K - (\mathring{\sigma} \cup \mathring{\sigma}')$ induzierte Orientierung erhält, so entsteht eine nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeit K_-'. $\overline{\psi}'$ induziert eine Abbildung von $K_-' - \mathring{\overline{\sigma}}_0'$ in Ω, und wenn φ' die Einschränkung auf $K_-'^{n-1}$ bezeichnet, so gilt für $c(\varphi')$ Entsprechendes wie oben für $c(\varphi)$, also $\overline{\alpha} \in H_*^n\left(K_-', \pi_{n-1}(\Omega)\right)$. Damit ist der Beweis vollständig.

Um Satz 4 noch zu verschärfen, definieren wir eine „Addition" von Pseudomannigfaltigkeiten: Sind zwei n-dimensionale Pseudomannigfaltigkeiten K_1, K_2 gegeben, die, falls sie orientierbar sind, eine bestimmte Orientierung tragen, so entfernen wir aus K_i $(i = 1, 2)$ das Innere $\mathring{\sigma}_i$ eines n-Simplexes und identifizieren $\partial\sigma_1$ topologisch, simplizial und für orientiertes K_1 und K_2 unter Umkehrung der induzierten Orientierung mit $\partial\sigma_2$. Es entsteht eine Pseudomannigfaltigkeit, die mit $K_1 + K_2$ bezeichnet wird. Setzt man voraus, daß σ_i in K_i eine Vollkugelumgebung besitzt, so ist $K_1 + K_2$ bis auf Homöomorphie durch K_1 und K_2 eindeutig bestimmt. Für unsere Zwecke kommt es jedoch

darauf nicht an; es genügt, wenn wir unter $K_1 + K_2$ irgendeine der Pseudomannigfaltigkeiten verstehen, die man in der beschriebenen Weise erhalten kann. Ist K_1 und K_2 orientierbar und folglich nach unserer Vereinbarung orientiert, so wird $K_1 + K_2$ orientiert, indem man die Orientierung der einzelnen n-Simplexe beibehält; anderenfalls ist $K_1 + K_2$ nichtorientierbar.

Hilfssatz 9. *Sind die n-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten K_1 und K_2 entweder beide orientiert oder beide nichtorientierbar, so ist*

$$H_*^n\left(K_1 + K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right) > H_*^n\left(K_1, \pi_{n-1}(\Omega)\right) + H_*^n\left(K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right).$$

[Man beachte $H^n(K_+, G) = G$ und $H^n(K_-, G) = G/2 \cdot G$.]

Beweis. Sei $\bar{c}_i$ ein beliebiges Element von $H_*^n\left(K_i, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$, c_i ein Kozykel, der $\bar{c}_i$ repräsentiert, mit $c_i(\sigma_i) = 0$, wobei σ_i das bei der Konstruktion von $K_1 + K_2$ aus K_i entfernte Simplex ist. Es ist $c_i \in C_*^n\left(K_i, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$, und nach Hilfssatz 6 gibt es eine Abbildung $\varphi_i: K_i^{n-1} \to \Omega$ mit $c(\varphi_i) = c_i$. $\varphi_i | \partial\sigma_i$ ist nullhomotop, man kann also annehmen, daß $\varphi_i(\partial\sigma_i) = w_0$ ist, denn erfüllt φ_i diese Bedingung zunächst nicht, so kann man durch Deformation eine Abbildung der gewünschten Art erhalten. Wird $\psi: (K_1 + K_2)^{n-1} \to \Omega$ durch $\psi | K_i^{n-1} = \varphi_i$ definiert, so repräsentiert $c(\psi)$ das Element $\bar{c}_1 + \bar{c}_2$ von $H^n\left(K_1 + K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right) = \pi_{n-1}(\Omega)$, folglich ist $\bar{c}_1 + \bar{c}_2 \in H_*^n\left(K_1 + K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$.

Sei E eine endlich erzeugte Untergruppe des Kerns N von $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ein Erzeugendensystem von E. Nach Satz 4 gibt es zu jedem α_j eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit K_j mit $\alpha_j \in H_*^n\left(K_j, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$. Setzt man $K = K_1 + K_2 + \cdots + K_k$, so enthält $H_*^n\left(K, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$ nach Hilfssatz 9 die von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ erzeugte Gruppe, also E. Analog schließt man für die nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeiten, und es ergibt sich:

Ergänzung zu Satz 4. *Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe E von N [bzw. E_2 von N_2] gibt es eine n-dimensionale orientierbare [nichtorientierbare] Pseudomannigfaltigkeit K_+ [bzw. K_-], so daß $E < H_*^n\left(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$ [$E_2 < H_*^n\left(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$] ist. Wenn insbesondere $\pi_{n-1}(\Omega)$ endlich erzeugt ist, so gibt es ein K_+ und ein K_- mit $N = H_*^n\left(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$ und $N_2 = H_*^n\left(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$.*

Satz 4 und die vorstehende Ergänzung gehen mittels Satz 1 in Aussagen über die Nullhomotopie von Abbildungen $f: K \to Y$ mit $f(K^{n-1}) = y_0$ über. Darunter fallen insbesondere die Abbildungen f_α, für die $f_\alpha(K - \sigma_0) = y_0$ [10]) ist (σ_0 ist ein n-Simplex einer Zerlegung von K) und $f_\alpha | \sigma_0$ das Element $\alpha \in \pi_n(Y)$ repräsentiert. Da für orientierbares K $\bar{d}(f_\alpha) = \alpha$ und für nichtorientierbares $\bar{d}(f_\alpha) = \bar{\alpha} \in \pi_n(Y)/2 \cdot \pi_n(Y)$ ist, gilt:

Satz 5. a) *Für jedes orientierbare $K = K_+$ ist f_α höchstens dann nullhomotop, wenn $h(\alpha) = 0$ ist. Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe $E < \pi_n(Y)$ mit $h(E) = 0$ gibt es ein K_+, so daß f_α für jedes $\alpha \in E$ nullhomotop ist.*

[10]) Die Forderungen $f(K^{n-1}) = y_0$ und $f(K - \sigma_0) = y_0$ sind übrigens im wesentlichen äquivalent, denn jede $(n-1)$-konstante Abbildung ist einer Abbildung, die höchstens auf σ_0 nicht konstant ist, homotop. Die zweite Forderung hat den Vorteil der größeren Anschaulichkeit.

b) *Für jedes nichtorientierbare $K = K_-$ ist f_α höchstens dann nullhomotop, wenn $h(\alpha)$ in $H_{n-1}(\Omega)$ durch 2 teilbar ist. Ist α in $\pi_n(Y)$ durch 2 teilbar, so ist $f_\alpha \sim 0$. Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe $E \subset \pi_n(Y)$ mit $h(E) \subset 2 \cdot H_{n-1}(\Omega)$ gibt es ein K_-, so daß f_α für jedes $\alpha \in E$ nullhomotop ist.*

Ist insbesondere $\pi_n(Y)$ endlich erzeugt, so gibt es ein festes (nur von Y und n abhängendes) K_+ mit $f_\alpha \sim 0$ für alle α mit verschwindendem $h(\alpha)$ und ein K mit $f_\alpha \simeq 0$ für alle α mit durch 2 teilbarem $h(\alpha)$.

§ 5. Die Sphäre als Bildraum.

Wir nehmen jetzt $Y = S^m$ an ($m \geq 2$). In diesem Fall ist der Hurewiczsche Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ unter Benutzung der Ergebnisse von SERRE [*11*], [*12*] leicht zu bestimmen:

Nach [*11*] S. 487 hat der Wegeraum Ω von S^m die singulären Homologiegruppen

$$H_i(\Omega) \cong \begin{cases} Z & \text{für} \quad i \equiv 0 \bmod (m-1) \\ 0 & \text{für} \quad i \not\equiv 0 \bmod (m-1), \end{cases}$$

wobei Z die Gruppe der ganzen Zahlen bedeutet. Andererseits ist in derselben Arbeit [*11*] S. 498 Prop. 5 gezeigt: Für $n > m$ ist $\pi_n(S^m)$ endlich, außer wenn m gerade und $n = 2m-1$ ist; in diesem Fall ist $\pi_n(S^m)$ direkte Summe von Z und einer endlichen Gruppe E_m. Bereits daraus folgt $h = 0$ außer für $n = m$ oder $m =$ gerade, $n = 2m-1$. Für $n = m$ ist h bekanntlich ein Isomorphismus auf (Isomorphiesatz von HUREWICZ). Einem Element $\alpha \in \pi_{2m-1}(S^m)$ ist nach [*5*], [*6*] die Hopfsche Invariante $\gamma(\alpha) \in Z$ zugeordnet. Die Abbildung $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \to Z$ ist linear. Identifiziert man $\pi_{2m-1}(S^m)$ nach Hilfssatz 5 mit $\pi_{2m-2}(\Omega)$ und $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z, so sind h und γ Homomorphismen zwischen denselben Gruppen.

Hilfssatz 10. *Bei geeigneter Identifikation von $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z ($m =$ gerade) stimmen die beiden Homomorphismen*

$$h, \gamma : \pi_{2m-1}(S^m) = \pi_{2m-2}(\Omega) \to H_{2m-2}(\Omega) = Z$$

überein.

Dieser Hilfssatz wird von SERRE in [*12*] Chap. IV als Lemme 2 (S. 280 und 286f.) bewiesen. Wir geben im Anhang einen anderen Beweis. Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 6. *Der Hurewiczsche Homomorphismus für den Wegeraum der m-Sphäre $h: \pi_n(S^m) = \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ ist für $n = m$ ein Isomorphismus auf, für $m =$ gerade und $n = 2m-1$ stimmt er bei geeigneter Identifikation $H_{2m-2}(\Omega) = Z$ mit der Hopfschen Abbildung $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \to Z$ überein, und in allen anderen Fällen ist er die Nullabbildung.*

Dieses Ergebnis erlaubt es, aus den allgemeinen Sätzen der früheren Paragraphen explizite Resultate für den Fall $Y = S^m$ herzuleiten. Zum Beispiel besagt Satz 5:

Satz 7. *Sei K eine n-dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit, σ_0 ein n-Simplex einer Zerlegung von K und $f_\alpha: K \to S^m$ die bis auf Homotopie*

bestimmte Abbildung, die auf $K - \sigma_0$ konstant ist und deren Einschränkung auf σ_0 das Element $\alpha \in \pi_n(S^m)$ repräsentiert. Dann gilt:

a) *Ist $n = m$ und $\alpha \neq 0$ oder $n = 2m - 1$, m gerade und $\gamma(\alpha) \neq 0$, so ist f_α für alle orientierbaren K wesentlich. Für jedes Paar (n, m) mit $n \neq m$ gibt es ein orientierbares K, so daß $f_\alpha \sim 0$ ist für jedes $\alpha \in \pi_n(S^m)$ mit $\gamma(\alpha) = 0$, falls $n = 2m - 1$ und m gerade ist, und anderenfalls für alle α.*

b) *Ist $n = m$ und α nicht durch 2 teilbar oder $n = 2m - 1$, m gerade und $\gamma(\alpha)$ ungerade, so ist f_α für alle nichtorientierbaren K wesentlich. Ist α durch 2 teilbar, so ist f_α immer unwesentlich. Für jedes Paar (n, m) mit $n \neq m$ gibt es ein nichtorientierbares K, so daß $f_\alpha \sim 0$ ist für jedes α mit geradem $\gamma(\alpha)$, falls $n = 2m - 1$ und m gerade ist, und anderenfalls für alle α.*

HOPF hat in [6] gezeigt, daß es für jedes gerade m ein Element $\alpha \in \pi_{2m-1}(S^m)$ mit $\gamma(\alpha) = 2$ gibt. Wegen $\pi_{2m-1}(S^m) \cong Z + E_m$ folgt daraus, daß $\gamma(\alpha)$ für jedes α mit unendlicher Ordnung (und offenbar nur für diese) von 0 verschieden ist. In Satz 7a) ist demnach enthalten: f_α ist genau dann für jedes orientierbare K wesentlich, wenn α in $\pi_n(S^m)$ unendliche Ordnung besitzt. Bemerkenswert ist, daß wir damit unabhängig von der algebraischen Struktur eine topologische Charakterisierung der Elemente unendlicher Ordnung von $\pi_n(S^m)$ gewonnen haben.

Für den Teil b) von Satz 7 wäre es interessant zu wissen, für welche m ungerade Hopfsche Invarianten vorkommen. Das ist der Fall für $m = 2, 4, 8$, wie schon HOPF in [6] zeigte. G. W. WHITEHEAD [15] bewies, daß es nicht richtig ist für $m \equiv 2 \bmod 4$ und $m \neq 2$, und nach einem Ergebnis von ADEM [1] ist sogar $m = 2^k$ für die Existenz von ungeraden Hopfschen Invarianten notwendig.

Bereits aus Satz 7a) und der nachfolgenden Bemerkung kann man entnehmen, daß für gerades m nicht nur jede $(2m-1)$-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit (HOPF [5], [6]) sondern auch jede orientierbare Pseudomannigfaltigkeit dieser Dimension wesentliche Abbildungen auf die m-Sphäre gestattet. Wir wollen nun die Voraussetzungen noch weiter abschwächen und zeigen:

Satz 8. *Ist m gerade, $n = 2m - 1$ und enthält die ganzzahlige Kohomologiegruppe $H^n(K)$ des höchstens $(n+1)$-dimensionalen Polyeders K Elemente größerer Ordnung als 2, so gibt es wesentliche Abbildungen $f: K \to S^m$. Für diejenigen Dimensionen m, in denen ungerade Hopfsche Invarianten vorkommen (z. B. 2, 4, 8) genügt es sogar, daß $H^n(K) \neq 0$ ist*[11]*). Ist die Bettische Zahl der Dimension n von K von 0 verschieden, so gibt es unendlich viele Homotopieklassen von Abbildungen $K \to S^m$.*

[11]) Mir ist nicht bekannt, ob die Behauptung allgemein richtig bleibt, wenn man nur $H^n(K) \neq 0$ voraussetzt. Jedenfalls braucht es dann aber keine $(n-1)$-konstanten wesentlichen Abbildungen zu geben, um die es sich bei unserem Beweis von Satz 8 immer handelt. Für diejenigen Dimensionen m, in denen keine ungeraden Hopfschen Invarianten vorkommen (z. B. $m = 6$ nach [15]), gibt es nämlich $(2m-1)$-dimensionale nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeiten, die keine $(2m-2)$-konstanten wesentlichen Abbildungen auf S^m gestatten [s. Satz 7b) und Fußnote [10])].

Beweis. Wir gehen aus von $\pi_n(S^m) = Z + E_m$ und zerlegen $H^n(K, \pi_n(S^m))$ entsprechend in $H^n(K) + H^n(K, E_m)$. Nach Satz 6 und dem, was wir über die Hopfsche Invariante wissen, bildet h die Untergruppe $Z \subset \pi_n(S^m)$ isomorph ab, und zwar auf $H_{n-1}(\Omega)$, wenn es Elemente mit ungerader Hopfscher Invariante gibt, d.h. wenn $\gamma(1) = \pm 1$ ist, und andernfalls auf die Untergruppe vom Index 2. Folglich ist $\tilde{h} \mid H^n(K)$ (zur Definition vgl. Satz 3) im ersten Fall ein Isomorphismus und im zweiten bildet es genau die Elemente der Ordnung 2 in 0 ab. Nach Satz 3 enthält also $H^n_*(K, \pi_n(S^m)) \cap H^n(K)$ höchstens Elemente der Ordnung 2 und im Falle $\gamma(1) = \pm 1$ sogar nur die 0. Aus Satz 2 folgt nun die Behauptung.

Wir zeigen zum Schluß, daß die Voraussetzung: m gerade und $n = 2m - 1$, in Satz 8 tatsächlich in der Natur der Sache liegt, indem wir folgendes beweisen:

Satz 9. *Ist die Freudenthalsche Einhängung eine Abbildung von $\pi_{n-1}(S^{m-1})$ auf $\pi_n(S^m)$ und ist $n > m$, so gibt es eine n-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, die sich in keiner Weise wesentlich auf die m-Sphäre abbilden läßt.*

Da nach den bekannten Freudenthalschen Sätzen (vgl. z.B. [16]) die Voraussetzung dieses Satzes für $n < 2m - 1$ und bei ungeradem m auch für $n = 2m - 1$ erfüllt ist, ergibt sich, daß in allen diesen Dimensionen ein Analogon zu Satz 8 nicht richtig sein kann.

Beweis von Satz 9. In den betrachteten Fällen hat $\pi_n(S^m)$ endliche Ordnung, etwa die Ordnung s. Wir entfernen aus einer n-Sphäre s disjunkte n-dimensionale Vollkugeln V_i^n, so daß ein Raum X mit s $(n-1)$-Sphären $S_1^{n-1}, \ldots, S_s^{n-1}$ als Rändern entsteht. Ferner betrachten wir zu jedem Element von $\pi_n(S^m)$ ein Urbild bei der Einhängung $\alpha_i \in \pi_{n-1}(S^{m-1})$, dazu eine repräsentierende Abbildung f_i von S_i^{n-1} auf S^{m-1} und identifizieren in S_i^{n-1} alle Punkte, die bei f_i denselben Bildpunkt haben. Man bestätigt leicht, daß der entstehende Raum P ein Polyeder ist, wenn man die Vollkugeln V_i^n in geeigneter Weise als Teilkomplexe einer simplizialen Zerlegung der ursprünglichen n-Sphäre und die Abbildungen f_i simplizial wählt. Da die $(n-1)$-dimensionalen Ränder von X in $(m-1)$-Sphären $S_1^{m-1}, \ldots, S_s^{m-1}$, also in Polyeder niedrigerer Dimension übergehen, ist P eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit. X_i entstehe aus X und P_i aus P dadurch, daß alle Punkte von $S_j^{n-1} \subset X$ bzw. $S_j^{m-1} \subset P$ für jedes $j \neq i$ miteinander identifiziert werden. X_i ist eine n-dimensionale Vollkugel mit dem Rand S_i^{n-1}, und die durch f_i gegebene Identifikation $S_i^{n-1} \to S_i^{m-1}$ läßt X_i in P_i übergehen. Nimmt man diese Identifikation nicht nur auf dem Rand S_i^{n-1} vor, sondern setzt man sie „radienweise" ins Innere von X_i fort, so erhält man eine m-dimensionale Vollkugel $\bar{X}_i$. Wird in P jedes S_j^{n-1} zu einem Punkt identifiziert, so entsteht wieder eine n-Sphäre S^n. Insgesamt ergibt sich folgendes Diagramm von kanonischen Projektionen

$$X \leftarrow P \rightarrow P_i \rightarrow S^n$$
$$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$$
$$X_i \qquad \bar{X}_i.$$

Da jede Abbildung $S_i^{m-1} \to S^m$ nullhomotop ist, läßt sich jede Abbildung $f: P \to S^m$ so deformieren, daß das Ergebnis der Deformation in der Form $\tilde{f}\,\pi$ darstellbar ist, wobei π die Projektion $P \to S^n$ und $\tilde{f}$ eine Abbildung von S^n in S^m ist. Es ist also nur noch zu zeigen: Für ein vollständiges Repräsentantensystem $\tilde{f}_i: S^n \to S^m$ der Elemente von $\pi_n(S^m)$ ist $\tilde{f}_i \pi$ nullhomotop. Hat $g_i: \overline{X}_i \to S^m$ mit $g_i(S_i^{m-1}) = y_0 \in S^m$ den Grad 1, und ist $\pi_i: P \to \overline{X}_i$ die kanonische Projektion, so ist $g_i \pi_i = \tilde{f}_i \pi$ mit einer Abbildung $\tilde{f}_i: S^n \to S^m$, die die Freudenthalsche Einhängung von α_i repräsentiert. Da g_i trivialerweise nullhomotop ist, folgt $\tilde{f}_i \pi \simeq 0$, und nach Wahl der α_i erschöpfen die Klassen der $\tilde{f}_i$ ganz $\pi_n(S^m)$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Die in diesem Beweis durchgeführten Konstruktionen sind auch im Zusammenhang mit Satz 7 von Interesse. Während dort nur die Existenz von Pseudomannigfaltigkeiten mit $f_\alpha \simeq 0$ (unter den dort genannten Bedingungen) gezeigt wurde, sind hier für gewisse Dimensionen Pseudomannigfaltigkeiten P direkt angegeben, für die jede Abbildung $f: P \to S^m$, also auch f_α nullhomotop ist.

Anhang.

Beweis von Hilfssatz 10[12]). Die Bestimmung von $h: \pi_{2m-2}(\Omega) \to H_{2m-2}(\Omega)$ und seines Zusammenhangs mit $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \to Z$ geschieht dadurch, daß wir h durch übersehbare Zwischenglieder mit dem entsprechenden Homomorphismus für einen einfacheren Raum, als es Ω ist, in Beziehung bringen. Wir führen dazu den Raum V der tangentialen Vektoren an S^m ein. V hat eine natürliche Faserraumstruktur über S^m; die Projektion heiße p, und die Faser über $y_0 \in S^m$ sei F. v_0 sei ein fester Punkt aus F, W der Raum aller in v_0 beginnenden Wege von V, $q: W \to V$ die Abbildung, die jedem Weg seinem Endpunkt zuordnet und $\overline{\Omega}$ der Teilraum $q^{-1}(F)$ von W. p induziert eine Abbildung $\mathfrak{p}: \overline{\Omega} \to \Omega$. Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$(1) \quad \begin{cases} \pi_{2m-2}(\Omega) \xleftarrow{\mathfrak{p}_*} \pi_{2m-2}(\overline{\Omega}) \xleftarrow{\partial_*} \pi_{2m-1}(W, \overline{\Omega}) \xrightarrow{q_*} \pi_{2m-1}(V, F) \\ \quad\quad\quad\

Seien $C \subset \Omega$ und $\overline{C} \subset \overline{\Omega}$ irgend zwei kompakte Teilräume mit $\mathfrak{p}(\overline{C}) \subset C$. Der Injektion $i: C \to \Omega$ entspricht die durch $(w, t) \to w(t)$ definierte Abbildung $C \times I \to S^m$. Sie kann als eine Deformation der konstanten Abbildung $C \to y_0$ aufgefaßt werden. Nach dem „zweiten Homotopiesatz" für Faserräume ([14] S. 54) gibt es eine „darüberliegende" Deformation der Abbildung $C \to v_0$, d.h. eine Abbildung $r: C \to \overline{\Omega}$ mit $\mathfrak{p} \circ r = i$. Außerdem ist $r \circ (\mathfrak{p} | \overline{C})$ der Injektion $\bar{i}: \overline{C} \to \overline{\Omega}$ homotop. Ist nämlich $T: \overline{C} \times I^2 \to S^m$ durch $T(\overline{w}, t, t') = (\mathfrak{p}\,\overline{w})(t)$ definiert, so gibt es ein $\overline{T}: \overline{C} \times I^2 \to V$ mit

$$\begin{aligned} \overline{T}(\overline{w}, 0, t') &= v_0 \\ \overline{T}(\overline{w}, t, 0) &= \big(r\,\mathfrak{p}(\overline{w})\big)(t) \\ \overline{T}(\overline{w}, t, 1) &= \overline{w}(t) \\ p \circ \overline{T} &= T, \end{aligned}$$

denn das Paar $\big(\overline{C} \times I^2, \overline{C} \times (I \times \partial I \cup 0 \times I)\big)$ ist mit $(\overline{C} \times I^2, \overline{C} \times 0 \times I)$ topologisch äquivalent und der „zweite Homotopiesatz" wieder anwendbar. Das Diagramm der Homologiegruppen

$$\begin{cases} H_n(\overline{C}) & \xrightarrow{\bar{i}^*} & H_n(\overline{\Omega}) \\ {\scriptstyle (\mathfrak{p}|\overline{C})^*}\downarrow & \overset{r^*}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{p}^*} \\ H_n(C) & \xrightarrow{i^*} & H_n(\Omega) \end{cases}$$

ist infolgedessen kommutativ. $\mathfrak{p}^*$ ist eine Abbildung auf, denn zu jedem $a \in H_n(\Omega)$ gibt es ein $C \subset \Omega$ und ein $a' \in H_n(C)$ mit $i^*(a') = a$, woraus $a = \mathfrak{p}^* r^*(a')$ folgt. Ferner ist $\mathfrak{p}^*$ ein Isomorphismus, denn wäre $\bar{a} \neq 0$ und $\mathfrak{p}^*(\bar{a}) = 0$, so gäbe es ein $\overline{C} \subset \overline{\Omega}$ und ein $\bar{a}' \in H_n(\overline{C})$ mit $\bar{i}^*(\bar{a}') = \bar{a}$, sowie ein $C \subset \Omega$ mit $\mathfrak{p}(\overline{C}) \subset C$ und $(\mathfrak{p}|\overline{C})^*(\bar{a}') = 0$, woraus sich der Widerspruch $r^*(\mathfrak{p}|\overline{C})^*(\bar{a}') = \bar{a} = 0$ ergäbe. Der gleiche Schluß gilt für die Homotopiegruppen.

Um q^* in (1) zu untersuchen, wählen wir eine Folge von niederdimensionalen „Großsphären" in S^m:

$$y_0 \in S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^{m-1} \subset S^m.$$

U^r und O^r seien die beiden abgeschlossenen Halbsphären, in die S^r durch S^{r-1} zerlegt wird. Ist M irgendeine Teilmenge von S^m, so schreiben wir für $p^{-1}(M)$ auch V_M und für $q^{-1}p^{-1}(M)$ auch W_M; z.B. ist $F = V_{y_0}$, $\overline{\Omega} = W_{y_0}$. Das Diagramm

$$(3)\quad \begin{cases} H_{m+r-1}(W_{S^r}, W_{y_0}) & \xrightarrow{i^*} & H_{m+r-1}(W_{S^r}, W_{O^r}) & \xleftarrow{j^*} & H_{m+r-1}(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}) & \xrightarrow{\partial^*} & H_{m+r-2}(W_{S^{r-1}}, \\ \downarrow{\scriptstyle q^*} & & \downarrow{\scriptstyle q^*} & & \downarrow{\scriptstyle q^*} & & \downarrow{\scriptstyle q^*} \\ H_{m+r-1}(V_{S^r}, V_{y_0}) & \xrightarrow{i^*} & H_{m+r-1}(V_{S^r}, V_{O^r}) & \xleftarrow{j^*} & H_{m+r-1}(V_{U^r}, V_{S^{r-1}}) & \xrightarrow{\partial^*} & H_{m+r-2}(V_{S^{r-1}}, \end{cases}$$

in dem i^*, j^* durch die Injektionen und ∂^* durch den Randoperator induziert sind, ist bekanntlich kommutativ.

Ist $y_0 \in N \subset M \subset S^m$ und gibt es eine Deformation der Identität von S^m, die y_0 festläßt und zum Schluß M in N abbildet, so gibt es nach dem „ersten Homotopiesatz" für Faserräume (vgl. [14] S. 50) eine Deformation f_t von V mit $f_t(v_0) = v_0$ für alle t und $f_1(V_M) \subset V_N$. Die durch $\varphi_t(w)(t') = f_t(w(t'))$, $w \in W$, $t' \in I$ definierte Deformation φ_t von W zieht dann W_M in W_N zusammen. Wird irgendein Teilraum $L \subset S^m$ bei der Ausgangsdeformation immer in sich abgebildet, so gilt auch $f_t(V_L) \subset V_L$ und $\varphi_t(W_L) \subset W_L$ für alle t. Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir zeigen, daß die Abbildungen i^*, j^*, ∂^* in (3) in beiden Zeilen Isomorphismen auf sind. Wir beschränken uns auf die obere Zeile; für die untere schließt man analog:

1. Da es eine Deformation von S^m gibt, die O^r in sich unter Festhaltung von y_0 auf y_0 zusammenzieht, ist auch W_{O^r} in sich auf W_{y_0} zusammenziehbar, folglich $H_n(W_{O^r}, W_{y_0}) = 0$ für alle n, und wegen der Exaktheit der Homologiefolge von $(W_{S^r}, W_{O^r}, W_{y_0})$ ist i^* ein Isomorphismus auf.

2. Ist U'^r eine Umgebung von U^r in S^r, so ist $W_{U'^r}$ Umgebung von W_{U^r} in W_{S^r}, und wegen einer bekannten Eigenschaft der Homologiegruppen („excision property") induziert die Injektion $(W_{U'^r}, W_{U'^r \cap O^r}) \to (W_{S^r}, W_{O^r})$ einen Isomorphismus auf. U'^r kann man so wählen, daß es eine Deformation von S^m gibt, die y_0 festläßt, U'^r auf U^r zusammenzieht und U^r sowie $U'^r \cap O^r$ als Ganzes invariant läßt. Eine „darüberliegende" Deformation der oben angegebenen Art zeigt: Die Injektion $(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}) \to (W_{U'^r}, W_{U'^r \cap O^r})$ induziert einen Isomorphismus auf. Folglich ist auch die zusammengesetzte Abbildung j^* ein Isomorphismus auf.

3. Wie unter 1. zeigt man $H_n(W_{U^r}, W_{y_0}) = 0$ und folgert aus der exakten Homologiefolge von $(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}, W_{y_0})$, daß ∂^* ein Isomorphismus auf ist.

Wendet man das Diagramm (3) der Reihe nach für $r = m, m-1, \ldots, 1$ an, so ergibt sich

$$(4) \qquad \begin{cases} H_{2m-1}(W, \overline{\Omega}) \cong H_{m-1}(W_{S^0}, W_{y_0}) \cong H_{m-1}(W_{y_1}) \\ \quad \downarrow q^* \qquad\qquad \downarrow q^* \qquad\qquad \downarrow q^* \\ H_{2m-1}(V, F) \cong H_{m-1}(V_{S^0}, V_{y_0}) \cong H_{m-1}(V_{y_1}), \end{cases}$$

wobei y_1 den zweiten Punkt (neben y_0) von S^0 bezeichnet. Der letzte dieser Homomorphismen q^* ist nun leicht zu übersehen. Aus der Bedeutung von W_{y_1} und q entnimmt man: Jeder sphärische Zykel in V_{y_1}, der in V nullhomotop ist, repräsentiert ein Bildelement bei der Abbildung q^*; und jedes Bild bei q^* ist in V nullhomolog. Da V_{y_1} als Faser von V eine $(m-1)$-Sphäre ist und auch für V alle Homotopiegruppen $\pi_i(V)$ mit $i < m-1$ verschwinden, ist in der Dimension $m-1$ jede Homologieklasse von V_{y_1} sphärisch, und Nullhomotopie und Nullhomologie in V ist gleichbedeutend. Folglich stimmt $q^*(H_{m-1}(W_{y_1}))$ mit dem Kern von $H_{m-1}(V_{y_1}) \to H_{m-1}(V)$ überein, und dieser ist bekanntlich $2 \cdot H_{m-1}(V_{y_1})$. Indem wir die vorgenommenen isomorphen Abbildungen zurückverfolgen, erhalten wir:

$$q^* : H_{2m-1}(W, \overline{\Omega}) \to H_{2m-1}(V, F)$$

hat die Untergruppe vom Index 2 als Bild. (Beide Gruppen sind mit Z isomorph.)

Damit ist in Diagramm (1) h auf h' zurückgeführt, denn alle „horizontalen" Homomorphismen sind nun bekannt. h' läßt sich leicht mit der Hopfschen Invariante in Beziehung setzen:

Wir wählen eine Abbildung $f_0: S^{2m-1} \to V$, so daß $p \circ f_0$ die Hopfsche Invariante $\gamma_0 \neq 0$ besitzt. Das ist möglich, denn in der exakten Homotopiefolge von V

$$\cdots \to \pi_{2m-1}(V) \to \pi_{2m-1}(S^m) \to \pi_{2m-2}(S^{m-1}) \to \cdots$$

ist $\pi_{2m-2}(S^{m-1})$ endlich, daher treten in $\pi_{2m-1}(S^m)$ gewisse Elemente mit beliebig hoher Hopfscher Invariante — es gibt solche nach [6] — als Bilder von Elementen aus $\pi_{2m-1}(V)$ auf. Man kann V und S^m so simplizial zerlegen, daß p simplizial wird, und indem man notfalls f_0 homotop abändert, voraussetzen, daß auch f_0 simplizial ist. Sei y_0 mittlerer Punkt eines m-Simplexes von S^m. Dann bestehen $p^{-1}(y_0)$ und $f_0^{-1} p^{-1}(y_0)$ aus affinen $(m-1)$-Simplexen, die in gewissen $(2m-1)$-Simplexen von V bzw. S^{2m-1} liegen, und lassen sich bei geeigneter Festsetzung der Orientierung als (singuläre) $(m-1)$-Zykel auffassen (vgl. [5], [6]). Wird in $f_0^{-1} p^{-1}(y_0)$ eine m-Kette c^m von S^{2m-1} eingespannt, so ist $p f_0(c^m)$ ein Zykel in S^m, und seine Homologieklasse ist nach Definition von γ das γ_0-fache eines erzeugenden Elements von $H_m(S^m)$. Ist a der Grad von f_0, so ist $f_0\left(f_0^{-1} p^{-1}(y_0)\right) = a \cdot p^{-1}(y_0)$. Bekanntlich läßt sich in $2 \cdot p^{-1}(y_0)$ eine m-Kette v^m von V einspannen, so daß $p(v^m)\, H_m(S^m)$ erzeugt. $f_0(2c^m) - a \cdot v^m$ ist dann ein m-Zykel in V; wegen $H_m(V) = 0$ ist er und sein Bild bei p nullhomolog. Folglich gilt $p f_0(2c^m) \sim a \cdot p(v^m)$ und nach der genannten Definition der Hopfschen Invariante $a = \pm 2\gamma_0$.

Sei nun α_0' das Element, das durch f_0 in $\pi_{2m-1}(V, F)$ bestimmt wird. Wie wir eben sahen, ist dann $h'(\alpha_0')$ das $2\gamma_0$-fache eines erzeugenden Elements von $H_{2m-1}(V, F) \cong H_{2m-1}(V)$; also ist im Diagramm (1) $\mathfrak{p}^* \partial^* q^{*-1} h'(\alpha_0')$ das γ_0-fache einer Erzeugenden von $H_{2m-2}(\Omega)$. Da die Abbildungen $\mathfrak{p}_* \circ \partial_* \circ q_*^{-1}$ und $p_*: \pi_{2m-1}(V, F) \to \pi_{2m-1}(S^m) = \pi_{2m-2}(\Omega)$ beide Isomorphismen auf sind, unterscheidet sich die Hopfsche Invariante von $\alpha_0 = \mathfrak{p}_* \partial_* q_*^{-1}(\alpha_0')$ von der von $p \circ f_0$ höchstens durch das Vorzeichen. Folglich gilt für dieses spezielle α_0 die Behauptung des Hilfssatzes: $h(\alpha_0) = \gamma_0 = \gamma(\alpha_0)$ bei geeigneter Identifikation von $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z. Da die Abbildungen h und γ linear sind, $\pi_{2m-2}(\Omega) \cong Z + E_m$ und $\gamma(\alpha_0) \neq 0$ ist, folgt das gleiche für alle Elemente von $\pi_{2m-2}(\Omega)$.

Literatur.

[1] ADEM, J.: The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 720 (1952). — [2] CHEN, C.: A note on the classification of mappings of a $(2n-2)$-dimensional complex into an n-sphere. Ann. of Math. (2) **51**, 238 (1950). — [3] EILENBERG, S.: Cohomology and continuous mappings. Ann. of Math. (2) **41**, 231 (1940). — [4] EILENBERG, S.: Singular homology theory. Ann. of Math. (2) **45**, 407 (1944). — [5] HOPF, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. **104**, 637 (1931). — [6] HOPF, H.: Über die Abbildungen von

Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fund. Math. **25**, 427 (1935). — [7] Hu, S. T.: Extension and classification of the mappings of a finite complex into a topological group or on n-sphere. Ann. of Math. (2) **50**, 158 (1949). — [8] Lefschetz, S.: Introduction to topology. Princeton Univ. Press 1949. — [9] Olum, P.: Obstructions to extensions and homotopies. Ann. of Math. (2) **52**, 1 (1950). — [10] Pontrjagin, L.: A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. **9** (51), 331 (1941). — [11] Serre, J. P.: Homologie singulière des espaces fibrés. Ann. of Math. **54**, 425 (1951). — [12] Serre, J. P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. (2) **58**, 258 (1953). — [13] Spanier, E.: Borsuk's cohomotopy groups. Ann. of Math. (2) **50**, 203 (1949). — [14] Steenrod, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [15] Whitehead, G. W.: A generalization of the Hopf invariant. Ann. of Math. (2) **51**, 192 (1950). — [16] Whitehead, G. W.: On the Freudenthal theorems. Ann. of Math. (2) **57**, 209 (1953). — [17] Whitney, H.: The maps of an n-complex into an n-sphere. Duke Math. J. **3**, 51 (1937).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. August 1954.)

VERBLUNSKY, S.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 324—335 (1954)

On the roots of a transcendental equation, occurring in the theory of trigonometric series.

By
S. VERBLUNSKY.

1. The transcendental equation is

$$A \sin \pi z - B \cos \pi z = 0 \tag{1}$$

where A, B are relatively prime polynomials in z, with real coefficients which are so restricted that all the roots of (1) are real and simple. In cases where the coefficients of A, B depend effectively on two parameters a, b, we can interpret them as rectangular Cartesian coordinates of a point in a plane, and we may expect that the problem of characterising those points of the plane for which (1) has all its roots real and simple, will admit of a straightforward solution. In this note, the problem is solved in two such cases: (i) when A, B are both of degree $\leqq 1$ (Theorem 2); (ii) when A, B are of degree $\leqq 2$, and one is even, and the other is odd (Theorems 3, 4).

The significance of equation (1) for the theory of trigonometric series, arises from the fact that if $f(x) \in L(0, 2\pi)$, then $f(x)$ has a "Fourier" expansion

$$\Sigma \alpha_k \cos \mu_k x + \beta_k \sin \mu_k x \tag{2}$$

where the μ_k are the roots (all real and simple), of (1), and this expansion is uniformly equiconvergent with a Fourier series (or a simple combination of such series) in the closed interval $(0, 2\pi)$ (Theorem 1). The detailed investigation of series of the form (2) is simplified, if the numbers μ_k are symmetrically placed with respect to the origin. This happens if one of A, B is odd, and the other is even; and an easy argument (§ 5) shows that this condition is necessary.

When A, B are of degree $\leqq 1$, and one is odd and the other even, there are two cases of equation (1), viz.

$$(\alpha) \qquad h \sin \pi z + z \cos \pi z = 0, \qquad (\beta) \quad z \sin \pi z + h \cos \pi z = 0.$$

The "Fourier" expansion in case (α) has been the subject of recent investigations. (See the list of references.) FEJÉS [1] and the author [2], [4] restrict h to be positive. But all that is used in their papers is that the roots of (α) are real and simple. According to Theorem 2, this happens if and only if $\pi h > -1$. HAMMERSLEY [3] allows (α) to have complex roots provided they are all simple, so that his expansion is not a trigonometric series in the usual sense. But when (α) has all its roots real and simple, the expansion

investigated by Hammersley reduces to the one investigated by Fejés and the author, though the identity is by no means obvious.

When one of A, B is even and of degree two, and the other is odd and of degree one, there are two cases of equation (1), viz

$$(\gamma) \quad (z^2+a)\sin\pi z - bz\cos\pi z = 0, \qquad (\delta) \quad az\sin\pi z - (z^2+b)\cos\pi z = 0.$$

The "Fourier" expansions corresponding to these cases, will be the subject of a forthcoming paper.

2. Let $Q(z)$ be a non-rational meromorphic function, all of whose poles are real and simple. Let the positive poles (if any) be denoted by $\mu_1 < \mu_2 < \cdots$, the negative poles by $\mu_{-1} > \mu_{-2} > \cdots$, and, if 0 is a pole, write $\mu_0 = 0$. Let C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ be a sequence of circles $|z| = n + \delta$, where δ is a positive constant, < 1, chosen so that for all large n, no pole of Q is on C_n. Let α be an assigned number, and let

$$\xi = x - t,$$

where x, t vary in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, so that $|\xi| \leq 2\pi$. Write, for large n,

$$H_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} Q(z)\cos z\xi\, dz$$

$$= \Sigma_n r_k \cos\mu_k\xi$$

where Σ_n denotes a sum taken over those values of k for which $|\mu_k| < n + \delta$, and r_k is the residue of Q at μ_k.

Let $f(t) \in L(\alpha, \alpha + 2\pi)$. Consider the expression

$$s_n(x) = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\, H_n(\xi)\, dt = \Sigma_n \alpha_k \cos\mu_k x + \beta_k \sin\mu_k x$$

where

$$\alpha_k - i\beta_k = r_k \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\, e^{-i\mu_k t}\, dt.$$

Then $s_n(x)$ is a partial sum of (2), and we may describe (2) as a "Fourier" expansion of the function $f(x)$.

We shall say that a sequence of functions $\{g_n(x)\}$ and a sequence of functions $\{h_n(x)\}$ are uniformly equiconvergent in a closed interval, if $g_n(x) - h_n(x) \to 0$ uniformly in the closed interval.

Theorem 1. *Let A, B be relatively prime polynomials in z with real coefficients, and such that the zeros of (1) are all real and simple. Let*

$$Q(z) = \frac{1}{2}\,\frac{A\cos\pi z + B\sin\pi z}{A\sin\pi z - B\cos\pi z}.$$

(i) *If degree of $A >$ degree of B, then $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ with $\sigma_n(x)$, the n^{th} partial sum of the Fourier series of $f(x)$. In particular, $s_n(\alpha) - s_n(\alpha + 2\pi) \to 0$ as $n \to \infty$.*

(ii) *If degree of $A <$ degree of B, then $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ with $\tau_{2n}(x)$, the $2n^{\text{th}}$ partial sum of the Fourier series of the function $\varphi(x)$, of period 4π, defined by*

$$\varphi(x) = f(x) \qquad (\alpha \leq x \leq \alpha + 2\pi)$$
$$= -f(x - 2\pi) \qquad (\alpha + 2\pi < x < \alpha + 4\pi).$$

In particular, $s_n(\alpha) + s_n(\alpha + 2\pi) \to 0$ as $n \to \infty$.

(iii) *If degree of $A =$ degree of B, then there is a number λ satisfying $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, such that $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ with*

$$t_n(x; \lambda) = \cos \lambda x \, s_n^{(1)}(x) + \sin \lambda x \, s_n^{(2)}(x),$$

where $s_n^{(1)}(x)$ is the n^{th} partial sum of the Fourier series of $f(x) \cos \lambda x$, and $s_n^{(2)}(x)$ is the n^{th} partial sum of the Fourier series of $f(x) \sin \lambda x$.

Another way of expressing the conclusion in (ii), is to say that $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ with $t_n(x; \frac{1}{2})$. This is a consequence of the fact (see [2], 87—88) that

$$\tau_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} f(t) \frac{\sin n\xi}{\sin \frac{1}{2}\xi} \, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} f(t) \frac{\cos \frac{1}{2}\xi \sin (n + \frac{1}{2})\xi}{\sin \frac{1}{2}\xi} \, dt + \varepsilon_n(x)$$

where $\varepsilon_n(x) \to 0$ uniformly in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$; and the first term is $t_n(x; \frac{1}{2})$.

3. Proof of (i). Choose for C_n the circle $|z| = n + \frac{1}{4}$. Then

$$Q(z) - \frac{1}{2} \cot \pi z = \frac{1}{2} \frac{B}{(A \tan \pi z - B) \sin \pi z \cos \pi z}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{1}{2} \cot \pi z \cos z\xi \, dz = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi \right]$$

$$H_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi \right] + R_n(\xi)$$

where

$$R_n(\xi) = \frac{1}{4\pi i} \int_{C_n} \frac{B \cot \pi z}{(A \tan \pi z - B)} \frac{\cos \xi z}{\cos^2 \pi z} \, dz.$$

On C_n, $|\tan \pi z|$ is between two positive constants, independent of n, and $B/A = O(n^{-1})$. Hence

$$\frac{B \cot \pi z}{(A \tan \pi z - B)} = O(n^{-1}).$$

Further, writing $\operatorname{Im} z = t$, we have

$$\cos \xi z = O(e^{|\xi t|}),$$

while, by our choice of C_n, there is a constant $K>0$, such that, for all n,

$$|\cos^2 \pi z| > K e^{2\pi|t|}.$$

Since $|\xi| \leqq 2\pi$, it follows that $R_n(\xi)$ is uniformly bounded. Moreover, for a fixed value of ξ satisfying $|\xi| < 2\pi$,

$$R_n(\xi) = O\left(\int_0^{2\pi} e^{-\delta|t|}\, d\vartheta\right),$$

where $\delta = 2\pi - |\xi|$ and $t = (n+\frac{1}{4})\sin\vartheta$. Hence $\lim_{n\to\infty} R_n(\xi) = 0$. Thus

$$\varepsilon_n(x) = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\, R_n(\xi)\, dt \to 0$$

as $n\to\infty$ uniformly in $(\alpha, \alpha+2\pi)$, and

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right] dt + \varepsilon_n(x),$$

as required.

Proof of (ii). We make the same choice for C_n as in Case (i). Then

$$Q(z) + \frac{1}{2}\tan\pi z = \frac{1}{2}\,\frac{A}{(A\tan\pi z - B)\cos^2\pi z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} -\frac{1}{2}\tan\pi z \cos z\xi\, dz = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi$$

$$H_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi + R_n(\xi)$$

where

$$R_n(\xi) = \frac{1}{4\pi i}\int_{C_n} \frac{A}{(A\tan\pi z - B)}\,\frac{\cos\xi z}{\cos^2\pi z}\, dz.$$

In this case, $\frac{A}{B} = O(n^{-1})$ on C_n, and by the same argument as in Case (i), we see that

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\left[\sum_1^n \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi\right] dt + \varepsilon_n(x)$$

$$= \tau_{2n}(x) + \varepsilon_n(x),$$

where $\varepsilon_n(x)\to 0$ uniformly in $(\alpha, \alpha+2\pi)$.

Proof of (iii). Let the leading terms in A, B have coefficients a, b respectively. It is no loss of generality to suppose that $a>0$. There is a number λ such that

$$a = c\cos\varepsilon\pi\lambda, \qquad b = c\sin\varepsilon\pi\lambda, \qquad c = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \qquad 0 < \lambda < \tfrac{1}{2}.$$

Then

$$\frac{a\cos\pi z + b\sin\pi z}{a\sin\pi z - b\cos\pi z} = \cot\pi(z - \varepsilon\lambda).$$

We choose C_n to be the circle $|z| = n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda$. Then any point on C_n for large n, is at a distance greater than an absolute positive constant from the poles of $\cot\pi(z-\varepsilon\lambda)$, and from the poles of $\sec\pi z$. Then

$$Q(z) - \frac{1}{2}\cot\pi(z - \varepsilon\lambda) = \frac{1}{2}\,\frac{aB - bA}{(A\tan\pi z - B)(a\tan\pi z - b)\cos^2\pi z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{1}{2}\cot\pi(z - \varepsilon\lambda)\cos z\xi\,dz = \frac{1}{\pi}\cos\lambda\xi\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right].$$

If m is the common degree of A and B, then, on C_n,

$$|a\tan\pi z - b| > K, \quad |A\tan\pi z - B| > K|z|^m > K n^m,$$

where K is a positive constant, independent of n. Further

$$aB - bA = O(|z|)^{m-1} = O(n^{m-1}).$$

Hence

$$H_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\cos\lambda\xi + \left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right] + R_n(\xi),$$

where $R_n(\xi)$ has the same properties as in Cases (i) and (ii). Thus

$$s_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\cos\lambda\xi\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right]dt + \varepsilon_n(x)$$

$$= t_n(x;\lambda) + \varepsilon_n(x),$$

where $\varepsilon_n(x) \to 0$ uniformly in $(\alpha, \alpha + 2\pi)$.

4. In this section we solve the problem of deciding when the roots of (1) are all real and simple, in the case when A and B are of degree $\leqq 1$.

If degree of $A = 1$, degree of $B = 0$, then we may suppose that

$$A = \pi z + a, \quad B = b.$$

The equation (1) becomes, on changing the variable to $\zeta = \pi z$,

$$(\zeta + a)\sin\zeta - b\cos\zeta = 0. \tag{3}$$

If degree of $A =$ degree of $B = 1$, then we may suppose that

$$A = \pi z + a, \quad B = \mu\pi z + b.$$

Write

$$\mu = \tan\alpha, \quad a_1 = a + \mu b, \quad b_1 = b - \mu a, \quad \zeta_1 = \zeta - \alpha.$$

Then the equation (1) becomes

$$(\zeta_1 + a_2)\sin\zeta_1 - b_2\cos\zeta_1 = 0$$

where

$$a_2 = a_1\cos^2\alpha + \alpha, \qquad b_2 = b_1\cos^2\alpha,$$

and is of the form (3).

If degree of $A = 0$, degree of $B = 1$, then we may suppose that

$$A = a, \quad B = \pi z + b.$$

Write $\zeta_1 = \frac{1}{2}\pi - \zeta$. Then (1) becomes

$$[\zeta_1 - (b + \tfrac{1}{2}\pi)]\sin\zeta_1 + a\cos\zeta_1 = 0,$$

and is again of the form (3).

We may therefore confine our attention to equation (3). The solution of the problem is given by

Theorem 2. *If (a, b) is above the cycloid C:*

$$2x = \varphi + \sin\varphi, \quad 2y = \cos\varphi - 1,$$

then (3) has all its roots real and simple. If (a, b) is below the cycloid, then (3) has a pair of imaginary roots. If (a, b) is on the cycloid, then (3) has all its roots real, but not all simple.

Proof. Equation (3) has at most two imaginary roots. For, if n is a positive integer, and Γ_n is the circle $|\zeta| = (n + \frac{1}{2})\pi$, then, on Γ_n, for $n > N(a, b)$,

$$|(\zeta + a)\sin\zeta| > |b\cos\zeta|.$$

Hence, (3) has the same number of roots inside Γ_n as $(\zeta + a)\sin\zeta$, viz. $2n + 2$. But (3) has one real root at least in each open interval $\big((r - \frac{1}{2})\pi, (r + \frac{1}{2})\pi\big)$, where $r = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, except possibly the one containing $-a$, if a is not an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$, or the two which have $-a$ as a common end point, if a is an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$. But, in the latter case, $-a$ is a root of (3). Thus, (3) has at least $2n$ real roots inside Γ_n.

The preceding argument shows that if $\varrho > 0$ and $|a| \leqq \varrho$, $|b| \leqq \varrho$, then the imaginary roots of (3) are contained in the circle $|\zeta| < (N + \frac{1}{2})\pi$ where $N = N(\varrho)$.

Let E denote the set of points (a, b) such that (3) has imaginary roots. The imaginary roots are continuous functions of (a, b). Since there are two of them, E is an open set. Let F denote the frontier of E. Let $(a_0, b_0) \in F$. Let ϱ be chosen so that $|a_0| < \varrho$, $|b_0| < \varrho$. There is a sequence $(a_\nu, b_\nu) \in E$ such that $(a_\nu, b_\nu) \to (a_0, b_0)$ and $|a_\nu| < \varrho$, $|b_\nu| < \varrho$.

Denote the first member of (3) by $f(\zeta)$, and let $f_t(\zeta)$ be the expression obtained on giving a, b the suffix t. Let $x_\nu + iy_\nu$ denote the imaginary zero of $f_\nu(\zeta)$ for which $y_\nu > 0$. Since $|x_\nu + iy_\nu| < (N + \frac{1}{2})\pi$, we may suppose, by

selecting a sub-sequence if necessary, that the sequence $\{x_\nu + i y_\nu\}$ is convergent. Since it must converge to a zero of $f_0(\zeta)$, and every such zero is real, we can write $x_\nu \pm i y_\nu \to x_0$.

Let $\varepsilon > 0$. Then $f_\nu(\zeta) \to f_0(\zeta)$ uniformly in the circle $|\zeta - x_0| \leqq \varepsilon$. Since $f_\nu(\zeta)$ has two zeros (at least) in this circle for $\nu > \nu_\varepsilon$, the same is true of $f_0(\zeta)$. Since ε is arbitrary, it follows that $f_0(\zeta)$ has a multiple zero at x_0. Dropping the suffix, we can say that if $(a, b) \in F$, then there is a real ζ such that $f(\zeta) = f'(\zeta) = 0$, or, what is the same, such that

$$a = -\zeta - \sin\zeta\cos\zeta, \quad b = -\sin^2\zeta. \tag{4}$$

Write $q = -2\zeta$. Then, by definition of C in the enunciation of Theorem 2, any point (a, b) of F is a point of C. It follows that if two points are on the same side of the cycloid, then both or neither belong to E.

The point $(0, -1)$ is below the cycloid, and the corresponding equation (3) is

$$\zeta\tan\zeta + 1 = 0.$$

This has a purely imaginary root $\zeta = i t$ with $t > 0$. For there is a positive t such that

$$\operatorname{th} t = \frac{1}{t}.$$

Thus $(0, -1) \in E$. Hence every point below C belongs to E.

The point $(\frac{1}{2}, 0)$ is above C, and the corresponding equation (3) is

$$(\zeta + \tfrac{1}{2})\sin\pi\zeta = 0,$$

and has all its roots real. Hence $(\frac{1}{2}, 0)$ does not belong to E, and therefore no point above C belongs to E.

Thus E consists of the points (a, b) below C, and consequently $F = C$. Hence, if $(a, b) \in C$ then (3) has all its roots real, but not all simple. Finally, if (a, b) is above C, then all the roots of (3) are real. There cannot be a multiple root ζ, for we would then have $f(\zeta) = f'(\zeta) = 0$, i.e. equations (4), i.e. $(a, b) \in C$. This completes the proof.

5. We now show that if A, B are relatively prime polynomials with real coefficients, then the roots of (1) are symmetrical with respect to $z = 0$ only if one of A, B is odd and the other is even. The equation (1) has an infinite number of roots z_k. Hence we require that

$$A(z)\sin\pi z - B(z)\cos\pi z = 0$$

$$A(-z)\sin\pi z + B(-z)\cos\pi z = 0,$$

shall both be satisfied for $z = z_k$. Hence

$$A(z)\,B(-z) + A(-z)\,B(z) = 0 \tag{5}$$

for $z = z_k$, and so for all z. We can write

$$A(z) = z\,p(u) + q(u), \quad B(z) = z\,r(u) + s(u),$$

where p, q, r, s are polynomials with real coefficients, and $u = z^2$. By (5),

$$u\,p\,r = q\,s$$

identically in z and so, identically in u. If p and s are identically zero, there is nothing to prove. In the contrary case, let $\tilde{\omega}$ denote the h.c.f. of p and s. Then

$$p = \tilde{\omega}\,p_1, \quad s = \tilde{\omega}\,s_1, \quad (p_1, s_1) = 1.$$

Hence $p_1\,r\,u = q\,s_1$, and p_1 divides q. We can write

$$q = p_1\,q_1, \quad r\,u = q_1\,s_1.$$

Then u divides q_1 or s_1. If u divides q_1, then $q_1 = u\,q_2$, $r = q_2\,s_1$

$$A = z\,p_1[\tilde{\omega} + z\,q_2], \quad B = s_1[\tilde{\omega} + z\,q_2].$$

But A, B are relatively prime. Hence $\tilde{\omega} + z\,q_2 = \text{const}$. Hence $q_2 \equiv 0$ and $q = 0$, $r \equiv 0$, as required. If u divides s_1, then

$$s_1 = u\,s_2, \qquad r = q_1\,s_2,$$

$$A = p_1[z\,\tilde{\omega} + q_1], \quad B = z\,s_2[z\,\tilde{\omega} + q_1].$$

Hence $\tilde{\omega} \equiv 0$. But then $p \equiv 0$, $s \equiv 0$, which is a contradiction.

6. We now consider the case of equation (1) when A, B are of degree ≤ 2 and one is even and the other is odd. If A is even, then writing $\zeta = \pi z$, we may suppose that (1) is

$$(\zeta^2 + a)\sin\zeta + b\,\zeta\cos\zeta = 0. \tag{6}$$

If B is even, we may suppose that (1) is

$$(\zeta^2 + a)\cos\zeta + b\,\zeta\sin\zeta = 0. \tag{7}$$

The solution of the problem of finding the points (a, b) for which (6) or (7) has all its roots real and simple, is given by the following theorems.

Theorem 3. *Let Γ denote the curve*

$$x = -\frac{t^2}{4}\left(\frac{t + \sin t}{t - \sin t}\right), \quad y = t\left(\frac{1 - \cos t}{t - \sin t}\right) \qquad (t > 0),$$

and let Λ denote the ray

$$x + y = 0, \quad x \geq -3.$$

Then $\Gamma + \Lambda$ divides the (x, y) plane into two domains D_1, D_2. If D_1 is the domain which contains the point $(-\pi, 0)$, then, if $(a, b) \in D_1$, the roots of (6) are real and simple. If $(a, b) \in D_2$, then (6) has a pair of imaginary roots. If $(a, b) \in \Gamma + \Lambda$, then the roots of (6) are all real, but not all simple.

Theorem 4. *Let G denote the curve*

$$x = -\frac{t^2}{4}\left(\frac{t-\sin t}{t+\sin t}\right), \qquad y = -t\left(\frac{1+\cos t}{t+\sin t}\right) \qquad (t>0),$$

and let L denote the ray

$$x = 0, \qquad y \geqq -1.$$

Then $G+L$ divides the (x, y) plane into two domains D_1, D_2. If D_1 is the domain which contains the point $(-\pi, 0)$, then, if $(a, b) \in D_1$, the roots of (7) are real and simple. If $(a, b) \in D_2$, then (7) has a pair of imaginary roots. If $(a, b) \in G+L$ then the roots of (7) are real, but not all simple.

7. Proof of Theorem 3. If ϱ is an assigned positive number and $|a| \leqq \varrho$, $|b| \leqq \varrho$, then

$$|(\zeta^2 + a)\sin\zeta| > |b\zeta\cos\zeta|$$

on the circle Γ_n, i.e. the circle $|\zeta| = (n+\frac{1}{2})\pi$ where n is an integer such that $n \geqq N(\varrho)$. Hence, the number of roots of (6) inside Γ_n equals the number of zeros of $(\zeta^2+a)\sin\zeta$ inside this circle, viz. $2n+3$. If $-a$ is not the square of an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$, then, in every closed interval of the form $\left((r-\frac{1}{2})\pi, (r+\frac{1}{2})\pi\right)$, except possibly two, $\zeta^2 + a \neq 0$. Hence, every open interval of this form, except possibly two, contains a zero of (6). Hence (6) has at least $2n-1$ real zeros inside Γ_n and at most four imaginary zeros. The same conclusion holds by continuity when $-a$ is the square of an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$. Further, the imaginary roots are inside the circle $|\zeta| < (N+\frac{1}{2})\pi$.

Let E denote the set of points (a, b) for which (6) has an imaginary root. Let F denote the frontier of E. By the argument used in § 4, it follows that E is open, and that if $(a, b) \in F$, then there is a real number ζ such that

$$f(\zeta) = (\zeta^2 + a)\sin\zeta + b\zeta\cos\zeta = 0, \tag{8'}$$

$$f'(\zeta) = (\zeta^2 + a)\cos\zeta + 2\zeta\sin\zeta + b(\cos\zeta - \zeta\sin\zeta) = 0. \tag{8''}$$

There are two possibilities. (i) Equations (8) are satisfied with $\zeta = 0$. (ii) Equations (8) are satisfied with $\zeta \neq 0$. In case (i), (8'') implies that $a + b = 0$. But we cannot have $a < -3$, since then (6) has a root $\zeta = iy$ with $y > 0$ and $(a, b) \in E$. For

$$if(iy) = (y^2 - a)\operatorname{sh} y + a y \operatorname{ch} y, \tag{9}$$

which is positive for large y, while for small positive y, the principal term in the Maclaurin expansion of (9) is $y^3(1 - \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}a)$, and is negative. Thus, in case (i), $(a, b) \in A$.

In case (ii), equations (8) are the same as

$$a = -\zeta^2\left(\frac{\zeta + \sin\zeta\cos\zeta}{\zeta - \sin\zeta\cos\zeta}\right), \qquad b = \frac{2\zeta\sin^2\zeta}{\zeta - \sin\zeta\cos\zeta}.$$

We may here suppose that $\zeta > 0$. Write $t = 2\zeta$. Then $(a, b) \in \Gamma$. Thus $F \subset \Gamma + A$.

To complete the proof, it remains to verify that $\Gamma + A$ divides the plane into two domains D_1, D_2, one of which, D_1 say, contains $(-\pi, 0)$, and the other contains the points $(a, -a)$ with $a < -3$. The theorem will then follow easily. For if two points belong to the same domain, then both or neither belong to E. Now $(a, -a) \in E$ if $a < -3$, and $(-\pi, 0)$ does not belong to E. Hence $D_1 E = 0$, $D_2 = E$. If $(a, b) \in CE$, then (6) has all its roots real. If $(a, b) \in D_1$, then the roots are all simple. For the values of (a, b) for which there is a multiple real root, form the curve Γ and the line $a + b = 0$. Hence finally, if $(a, b) \in \Gamma + A$, there is a multiple real root.

8. Write

$$s = \sin t, \quad c = \cos t. \tag{10}$$

We consider the function

$$g(t) = \frac{t^2}{t+s} - \frac{s}{1+c}$$

in the open interval $(r\pi, (r+1)\pi)$, which we denote by δ_r, for $r = 0, 1, \ldots$. We have

$$g'(t) = -\frac{(ct - s)^2}{(t+s)^2 (1+c)}.$$

Thus $g(t)$ is a decreasing function in each δ_r. Now

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t(t+s)(1+c)}{2(t-s)^2} g(t), \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{s(t+s)}{(t-s)^2} g(t).$$

If $g(t) \neq 0$, then

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{t} \tan \frac{t}{2},$$

and

$$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t - t}{(t \cos \frac{1}{2} t)^2} < 0.$$

Consider first δ_0. Since $g \to 0$ as $t \downarrow 0$, we have $g(t) < 0$ in δ_0. Then $\frac{dx}{dt} > 0$, $\frac{dy}{dt} < 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Since $x \to -3$, $y \to 3$ as $t \downarrow 0$, the arc of Γ which corresponds to δ_0 is a concave arc joining $P_0(3, -3)$ to $A_1(-\frac{1}{4}\pi^2, 2)$. At P_0 the gradient is -1, so that Γ forms a cusp with A. At A_1 the tangent is parallel to the y-axis.

In δ_1, we have $g(t) > 0$. The corresponding arc of Γ is a convex arc joining A_1 to $B_1(-\pi^2, 0)$. At B_1, the arc touches the x-axis.

In δ_2 (and in $\delta_4, \delta_6, \ldots$) the behaviour of x, y is not so simple. Since g is positive near $t = 2\pi$ and negative near $t = 3\pi$, there is a number ξ_1 between 2π and 3π such that $g(t) > 0$ if $2\pi < t < \xi_1$, and $g(t) < 0$ if $\xi_1 < t < 3\pi$. Hence the part of Γ corresponding to $(2\pi, \xi_1)$ is a convex arc joining B_1 to P_1, where P_1 is the point for which $t = \xi_1$; and the part of Γ corresponding to $(\xi_1, 3\pi)$ is a concave arc joining P_1 to A_2 $(-\frac{9}{4}\pi^2, 2)$. At P_1 there is a cusp; at A_2 the tangent is parallel to the y-axis.

The arc corresponding to δ_3 is a convex arc joining A_2 to $B_2(-4\pi^2, 0)$, at which point it touches the x-axis; and so on.

9. Proof of Theorem 4. Let E denote the set of points (a, b) such that (7) has an imaginary root. As in § 7, we see that (7) has at most four imaginary roots, and that if $|a| \leq \varrho$, $|b| \leq \varrho$, then the imaginary roots are inside the circle $|\zeta| = N\pi$ where $N = N(\varrho)$. Further, E is an open set, and if $(a, b) \in F$, where F is the frontier of E, then there is a real number ζ such that

$$(11') \qquad \varphi(\zeta) = (\zeta^2 + a)\cos\zeta + b\zeta\sin\zeta = 0,$$

$$(11'') \qquad \varphi'(\zeta) = -(\zeta^2 + a)\sin\zeta + 2\zeta\cos\zeta + b(\sin\zeta + \zeta\cos\zeta) = 0.$$

There are two possibilities. (i) Equations (11) are satisfied with $\zeta = 0$. (ii) Equations (11) are satisfied with $\zeta \neq 0$. In case (i), (11′) implies that $a = 0$. We cannot have $b < -1$ since then (7) has a root $\zeta = iy$ with $y > 0$, which would imply that $(a, b) \in E$. For

$$\varphi(iy) = -y(y\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y),$$

and this is negative for large y, while for small y it is positive if $b < -1$. Thus, in case (i), $(a, b) \in L$.

In case (ii), equations (11) are the same as

$$a = \zeta^2 \frac{\sin\zeta\cos\zeta - \zeta}{\sin\zeta\cos\zeta + \zeta}, \qquad b = -\frac{2\zeta\cos^2\zeta}{\sin\zeta\cos\zeta + \zeta}.$$

We may suppose that $\zeta > 0$. Write $t = 2\zeta$. Then $(a, b) \in G$. Thus $F \subset G + L$.

To complete the proof, it is enough to verify that $G + L$ divides the plane into two domains D_1, D_2, one of which, D_1 say, contains $(-\pi, 0)$, and the other contains the points $(0, b)$ with $b < -1$. For $(0, b) \in E$ if $b < -1$, and $(-\pi, 0)$ does not belong to E. Thus $E = D_2$, and the argument proceeds as at the end of § 7.

We use the abbreviations (10). Write

$$h(t) = \frac{t^2}{t - s} + \frac{1 + c}{s}$$

and consider the behaviour of $h(t)$ in each open interval δ_r. We have

$$h'(t) = -\frac{(ct - s)^2}{(t - s)^2(1 - c)}$$

so that $h(t)$ is decreasing in each δ_r. Further,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t(t - s)(1 - c)}{2(t + s)^2} h(t), \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{s(t - s)}{(t + s)^2} h(t).$$

If $h(t) \neq 0$, then

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{t}\cot\frac{t}{2},$$

and

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{t + \sin t}{(t\sin\frac{1}{2}t)^2} > 0.$$

Clearly $h(t) > 0$ in δ_0. Then $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dt} > 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Since $x \to 0$, $y \to -1$, as $t \downarrow 0$, the arc of G which corresponds to δ_0, is a concave arc joining $Q_0(0, -1)$ to $A_1(-\frac{1}{4}\pi^2, 0)$. At Q_0, G forms a cusp with L. At A_1, it touches the x-axis.

In δ_1, h is positive near $t = \pi$ and negative near $t = 2\pi$. Hence there is a number η_1 between π and 2π such that $h(t) > 0$ if $\pi < t < \eta_1$ and $h(t) < 0$ if $\eta_1 < t < 2\pi$. Hence the part of G which corresponds to (π, η_1) is a concave arc joining A_1 to Q_1, where Q_1 is the point for which $t = \eta_1$, and the part of G corresponding to $(\eta_1, 2\pi)$ is a convex arc joining Q_1 to $B_1(-\pi^2, -2)$. At Q_1 there is a cusp, at B_1 the tangent is parallel to the y-axis. In δ_2, $h(t) > 0$. Hence the corresponding part of G is a concave arc joining B_1 to $A_2(-\frac{9}{4}\pi^2, 0)$ at which it touches the x-axis, and so on.

References.

[1] Fejes, L.: Über die Fouriersche Reihe der Abkühlung. Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **11**, 28—36 (1946). — [2] Verblunsky, S.: Sur une classe de series exponentielles de Cauchy. Bull. Sci. Math. (2) **76**, 85—96 (1952). — [3] Hammersley, J. M.: A non-harmonic Fourier series. Acta Math. **89**, 243—260 (1953). — [4] Verblunsky, S.: Some theorems on F. A. series. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **3**, 89—105 (1954).

Dept. of Math., The Queen's University, Belfast (N. Ireland).

(Eingegangen am 19. Juli 1954.)

NITSCHE, J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 336—347 (1954)

Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems.

Von
JOHANNES NITSCHE.

T sei der Einheitskreis $x^2+y^2<1$ und S seine Peripherie mit der Bogenlänge $s\,(-\infty<s<\infty)$. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Randwertproblem

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\{-F(x,y;u,v)\,v_x + E(x,y;u,v)\,v_y\}\\ u_y &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\{-G(x,y;u,v)\,v_x + F(x,y;u,v)\,v_y\}\end{aligned}\right\}\ \text{in } T$$

$$(2)\qquad R^\sigma(u,v)\equiv u\cos\sigma(s)+v\sin\sigma(s)=h(s)\quad\text{auf}\quad S.$$

Es sollen die folgenden Voraussetzungen gelten: Die reellen Funktionen $E=E(x,y;u,v)$, $F=F(x,y;u,v)$ und $G=G(x,y;u,v)$ seien für $x^2+y^2\leqq 1$ und alle u,v erklärt und nach den beiden letzten Argumenten differenzierbar. E,F,G und $E_u,\ldots,G_v$ sollen als Funktionen von x,y in $T+S$ λ-HÖLDER-stetig (kurz: aus $\mathfrak{C}^0(\lambda)$, $0<\lambda<1$) sein, und zwar gleichmäßig für jeden abgeschlossenen Bereich der u,v-Ebene. Für jede Zahl $m\geqq 0$ sollen $E_u,\ldots,G_v$ in $x^2+y^2\leqq 1$; $|u|,|v|\leqq m$ bezüglich u und v HÖLDER-stetig sein. HÖLDER-Koeffizient und HÖLDER-Exponent dürfen dabei von m abhängen. Außerdem soll $EG-F^2>0$, $E>0$ gelten. $\sigma=\sigma(s)$ sei eine λ-HÖLDER-stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge (kurz: $\sigma\in\mathfrak{C}^1(\lambda)$), welche sich bei einmaligem Umlaufen des Randes im positiven Sinne um ein ganzzahliges Vielfaches n ($\gtrless 0$) von 2π ändert: $\sigma(s+2\pi)=\sigma(s)+2\pi n$. Die Zahl n heißt der Index der Randbedingung. Zur Abkürzung wird noch $\tau(s)=\sigma(s)+\frac{\pi}{2}$ gesetzt. $h(s)$ schließlich sei periodisch: $h(s+2\pi)=h(s)$ und aus $\mathfrak{C}^1(\lambda)$. Gesucht sind Lösungen $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. u und v sind in T stetig differenzierbar und in $T+S$ HÖLDER-stetig[1]).

2a. Wenn $n\geqq 0$, so erfüllen u,v auf dem Rande zusätzlich die $2n+1$ Bedingungen

$$(2a)\qquad \int_S h_j(s)\,R^\tau(u,v)\,ds = \int_S h_j(s)\{u\cos\tau(s)+v\sin\tau(s)\}\,ds=\varkappa_j\quad(j=0,1,\ldots,2n)$$

mit beliebig vorgegebenen (reellen) Konstanten $\varkappa_j$. Dabei stehen die $h_j(s)$ als Abkürzung für die trigonometrischen Funktionen

$$1,\quad \cos s,\quad \sin s,\quad \ldots,\quad \cos(ns),\quad \sin(ns).$$

[1]) Mit einem beliebigen und auch von Lösung zu Lösung verschiedenen Exponenten >0.

[Kurz: Die ersten $2n+1$ FOURIER-Koeffizienten von $R^\tau(u, v)$ sollen vorgegebene Werte annehmen.]

2b. Wenn $n<0$, so unterscheidet sich der auf dem Rande definierte Ausdruck $R^\sigma(u, v)$ von der Funktion $h(s)$ höchstens um eine reelle Linearkombination[2])

$$\gamma_0 h_0(s) + \gamma_1 h_1(s) + \cdots + \gamma_{2|n|-2} h_{2|n|-2}(s).$$

[Kurz: $R^\sigma(u, v)$ soll mit $h(s)$ jedenfalls bis auf die ersten $2|n|-1$ FOURIER-Koeffizienten übereinstimmen.]

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz. *Das Randwertproblem* (1), (2) *hat für* $n=0$ *stets eine eindeutig bestimmte Lösung* u, v. *Sie gehört in* $T+S$ *überdies zu* $\mathfrak{C}^1(\lambda')$ $(\lambda'<\lambda)$. *Für* $n\neq 0$ *existiert stets eine eindeutig bestimmte Lösung* u, v, *wenn es eine Konstante* M *gibt, mit der für alle* u, v *die Ungleichung* $E+G\leq M|EG-F^2$ *richtig ist*[3]).

Bemerkung. Unter zusätzlichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen werden von dem formulierten Satz gewisse Randwertprobleme einer Klasse quasilinearer selbstadjungierter Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfaßt, insbesondere für $\sigma=\text{const}$ $(n=0!)$ das DIRICHLETsche Problem. — Für $\sigma=\pi/2$ erhielte man z.B., wenn E, F und G nicht von u abhängen:

$$\left(\frac{G v_x - F v_y}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_x + \left(\frac{E v_y - F v_x}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_y = 0 \quad \text{in } T, \tag{3}$$

$$v = h(s) \quad \text{auf} \quad S. \tag{3'}$$

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus. Zunächst werden, wie üblich[4]), Normen eingeführt: $||u||' = \text{Max}|u(x, y)|$ für $(x, y)\in T+S$; $||u||_{\mu,0} = ||u|| - \overline{\text{fin}}\left\{|u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)|\cdot[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{-\frac{\mu}{2}}\right\}$ für (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\in T+S$ und $(x_1, y_1)\neq(x_2, y_2)$; $||u||_{\mu,1} = ||u||_{\mu,0} + ||u_x||_{\mu,0} + ||u_y||_{\mu,0}$ usw. Der Kürze halber finden die gleichen Bezeichnungen auch für Funktionen der Bogenlänge Verwendung. Weiterhin steht $||u, v||$ für $\text{Max}(||u||, ||v||)$ usw. Gelegentlich wird auch die komplexe Schreibweise mit $x+iy=z$, $u(x, y)+iv(x, y)=w(z)$, $||w|| = ||u, v||$, ..., $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ benutzt. Wenn im folgenden lediglich von der HÖLDER-Stetigkeit einer Funktion die Rede ist, so ist nur diese Tatsache, nicht jedoch der genaue HÖLDER-Exponent von Belang.

Hilfssatz 1. Voraussetzungen. *Durch die zu* $\mathfrak{C}^0(\beta)$ $(0<\beta<1)$ *gehörige Funktion* $t=t(s)$ *werde eine topologische Abbildung des Randes* S *auf sich vermittelt* $(t(0)=0,\ t(2\pi)=2\pi)$. *Weiterhin sei* $p(s)$ *eine periodische und ebenfalls*

[2]) Die γ_j sind, wie sich herausstellen wird, eindeutig bestimmt.

[3]) Diese Bedingung ist nur für den Existenzbeweis erforderlich. Man kann sie auch so formulieren: Es existiert eine Konstante $K>0$, so daß

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 \leq K\sqrt{EG-F^2}(\xi^2+\eta^2).$$

[4]) Vgl. J. SCHAUDER [9], S. 664—665.

β-HÖLDER-*stetige reelle Funktion. Wir betrachten die Determinante*

$$\Delta = \mathrm{Det}\left(\int_S e^{p(t(s))}\, h_j(t(s))\, h_l(s)\, ds\right) \qquad (j, l = 0, \ldots, 2n). \tag{4}$$

Behauptungen. *Δ ist positiv. Wenn man die Funktionen $t(s)$ und $p(s)$ variiert, so gibt es eine allein von $||t||_{\beta,0}$ und $||p||_{\beta,0}$ abhängige Schranke $d>0$, so daß $\Delta \geqq d$ bleibt. Für $n=0$ fällt die Abhängigkeit von $||t||_{\beta,0}$ weg, und die Abhängigkeit von $||p||_{\beta,0}$ kann durch die schwächere von $||p||$ ersetzt werden.*

Der Beweis kann übergangen werden.

Hilfssatz 2. Voraussetzungen. *Es wird das Randwertproblem*

$$u_x - v_y = r_1(x, y), \qquad u_y + v_x = r_2(x, y) \quad \text{in } T \tag{5}$$

mit den Randbedingungen (2), (2a) *bzw.* (2), (2b) *betrachtet. Die Funktionen $r_1(x, y)$ und $r_2(x, y)$ sollen in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^0(\lambda)$ gehören.*

Behauptungen. *Es existiert eine eindeutig bestimmte, in $T+S$ überdies zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$ gehörige Lösung u, v. Es seien eine Zahl λ' $(0 \leqq \lambda' \leqq \lambda)$ und eine beliebige Zahl β $(0 < \beta \leqq \lambda)$ gegeben, und es werde $\varepsilon = \mathrm{Max}(\lambda', \beta)$ gesetzt. Dann gelten Abschätzungen*

$$||u, v||_{\lambda',0} \leqq \nu_T\, ||r_1, r_2|| + \nu_S\, ||h||_{\lambda',0} + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j\, |\varkappa_j|, \tag{6}$$

$$||u, v||_{\beta,1} \leqq \nu_T\, ||r_1, r_2||_{\beta,0} + \nu_S\, ||h||_{\beta,1} + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j\, |\varkappa_j|. \tag{7}$$

Die Schranken ν in (6) *hängen für $n=0$ von λ' und $||\sigma||_{\lambda',0}$, für $n \neq 0$ von ε und $||\sigma||_{\varepsilon,0}$ ab, die Schranken ν in* (7) *von β und $||\sigma||_{\beta,1}$. — Die Summen rechts fallen für $n<0$ weg.*

Beweis. Zunächst sei $n \geqq 0$. $w^0 = u^0 + i\, v^0$ sei die partikuläre Lösung der Gln. (5), deren Realteil auf dem Rande verschwindet. Nach bekannten Sätzen[5]) gehört $w^0(z)$ in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$ und erfüllt Ungleichungen der Art

$$||w^0||_{\lambda',0} \leqq \mu_1(\lambda') \cdot ||r_1, r_2||, \qquad ||w^0||_{\beta,1} \leqq \mu_2(\beta)\, ||r_1, r_2||_{\beta,0}. \tag{8}$$

Die gewünschte Lösung $w(z)$ soll durch den Ansatz

$$w = w^0 + e^{i\omega}\left\{z^n W + \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j w_j\right\} \tag{9}$$

gewonnen werden. $\omega = \omega(z)$ zunächst sei die in T regulär-analytische Funktion, für welche auf S: $\Re\mathfrak{e}\, \omega = \sigma(s) - n \cdot s$ und in $z=0$: $\Im\mathfrak{m}\, \omega = 0$ gilt. ω gehört in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$, und man hat[6])

$$||\omega||_{\lambda',0} \leqq \mu_3, \qquad ||\omega||_{\beta,1} \leqq \mu_4 \tag{10}$$

[5]) Vgl. z.B. L. LICHTENSTEIN [2], S. 207—209, [4], S. 574.

[6]) Vgl. J. SCHAUDER [8], S. 635 und [9], Fußnote 4; außerdem L. LICHTENSTEIN [3], insbesondere S. 325.

mit nur von λ' und $||\sigma||_{\lambda',0}$ bzw. β und $||\sigma||_{\beta,1}$ abhängigen Schranken μ_3 bzw. μ_4. Nunmehr heißt die Randbedingung (2) folgendermaßen:

$$\Re e\, W + \Re e\left\{\bar{z}^n \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j w_j\right\} = e^{\Im m\, \omega(s)}\{h(s) - R^\sigma(u^0, v^0)\}. \tag{11}$$

Die in T regulär-analytische Funktion $W(z) = U + iV$ wird jetzt so bestimmt, daß sie auf S der Bedingung

$$\Re e\, W = e^{\Im m\, \omega(s)}\{h(s) - R^\sigma(u^0, v^0)\} \tag{12}$$

genügt; außerdem soll $\Im m\, W$ im Nullpunkt verschwinden. W gehört in $T + S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$, und wegen (8) und (10) gilt[7])

$$||W||_{\lambda',0} \leqq \mu_5 ||r_1, r_2||_{\beta,0} + \mu_6 ||h||_{\lambda',0}, \quad ||W||_{\beta,1} \leqq \mu_7 ||r_1, r_2||_{\beta,0} + \mu_8 ||h||_{\beta,1}, \tag{13}$$

wobei μ_5 und μ_6 nur von λ' und $||\sigma||_{\lambda',0}$ und μ_7 und μ_8 nur von β und $||\sigma||_{\beta,1}$ abhängen. Die Funktionen $w_j(z)$ schließlich sollen in T regulär-analytisch und Lösungen des Randwertproblems $\Re e(\bar{z}^n w_j) = 0$ sein. Man kann etwa die folgenden $2n+1$ linear unabhängigen Funktionen wählen:

$$w_0(z) = i z^n, \quad \left\{\begin{array}{l} w_{2l-1}(z) = \frac{i}{2}(z^{n+l} + z^{n-l}) \\ w_{2l}(z) = \frac{1}{2}(z^{n+l} - z^{n-l}) \end{array}\right\} \quad (l = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Es müssen noch die zusätzlichen Bedingungen (2a) befriedigt werden. Sie führen auf das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der α_j:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \int_S e^{-\Im m\, \omega(s)} h_j(s)\, h_k(s)\, ds \\ \qquad = \varkappa_j - \int_S h_j(s)\, R^\tau(u^0, v^0)\, ds - \int_S e^{-\Im m\, \omega(s)} h_j(s)\, V(s)\, ds. \end{array}\right. \tag{15}$$

Die Koeffizientendeterminante ist nach Hilfssatz 1 größer als eine Zahl $d > 0$, welche sich im Falle $n = 0$ allein aus $||\omega||$ d.h. $||\sigma||$, im Falle $n > 0$ aus $||\omega||_{\beta,0}$ d.h. $||\sigma||_{\beta,0}$ bestimmt. Berücksichtigt man die Eigenschaften von w^0, ω und W, so erhält man Abschätzungen

$$|\alpha_j| \leqq \mu_9 |\varkappa_j| + \mu_{10} ||r_1, r_2|| + \mu_{11} ||h|| \quad (j = 0, \ldots, 2n). \tag{16}$$

Die Abhängigkeit der Schranken $\mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}$ ist die gleiche wie die von d.

Faßt man alles zusammen, so erkennt man an Hand der Darstellung (9) die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

Als Zweites ist der Fall $n < 0$ zu erledigen. Ähnlich wie eben wird die Lösung in der Form

$$w = w^0 + e^{i\omega} z^n W = w^0 + e^{i\omega} z^{-|n|} W \tag{17}$$

angesetzt. Die Funktionen w^0 und w sollen ihre alte Bedeutung behalten. Die Randbedingung (2), (2b):

$$R^\sigma(u, v) = h(s) - \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} \gamma_j h_j(s) \tag{18}$$

[7]) Vgl. Fußnote 6).

führt jetzt zu

$$\Re e\, W = e^{\Im m\, \omega(s)} \left\{ h(s) - \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} \gamma_j h_j(s) - R^{\sigma}(u^0, v^0) \right\}. \tag{19}$$

Hieraus ist zu ersehen, welche Werte man für die γ_j zu wählen hat, damit eine Lösung existiert. $W(z)$ muß nämlich bei $z=0$ eine $|n|$-fache Nullstelle besitzen, d.h. die ersten $2|n|-1$ FOURIER-Koeffizienten der rechten Seite von (19) müssen verschwinden. Dadurch sind die γ_j bestimmt. Analog wie für die α_j erhält man jetzt Abschätzungen

$$|\gamma_j| \leq \mu_{12} ||h|| + \mu_{13} ||R^{\sigma}(u^0, v^0)|| \leq \mu_{12} ||h|| + \mu_{14} ||r_1, r_2|| \tag{20}$$

mit Schranken, welche noch von $||\omega||_{\beta,0}$ d.h. $||\sigma||_{\beta,0}$ abhängen. Nun bestätigen sich auch für den Fall $n<0$ die aufgestellten Behauptungen.

Hilfssatz 3. Voraussetzungen. *Durch die in $|z| \leq 1$ stetig differenzierbare Funktion $z' = \varphi(z)$ werde der Einheitskreis $T + S$ der z-Ebene topologisch auf den Einheitskreis $T' + S'$ der z'-Ebene abgebildet [Umkehrung: $z = \psi(z')$]. Die Funktionaldeterminante $\square = |\varphi_z|^2 - |\varphi_{\bar{z}}|^2$ sei in $|z| \leq 1$ positiv. Wir setzen $w(\psi(z')) = w'(z')$ und betrachten für $w(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ das Randwertproblem*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \square \cdot \frac{\partial w'}{\partial \bar{z}'} = 0 \tag{21}$$

mit den Randbedingungen (2), (2a) *bzw.* (2), (2b).

Behauptungen. *Es seien eine Zahl ε $(0 < \varepsilon \leq \lambda)$ und eine Zahl δ $(0 \leq \delta \leq \varepsilon)$ gegeben, und es werde $\lambda_1 = \delta^4$ gesetzt. Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $w(z)$ eine Abschätzung*

$$||w||_{\lambda_1,0} \leq \nu_S ||h||_{\delta,0} + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j |\varkappa_j|. \tag{22}$$

Die Schranken ν_S und ν_j hängen außer von $\sigma(s)$ für $n=0$ von δ, $||\varrho||_{\delta,0}$, $||\psi||'_{\delta,0}$ [8]) und für $n \neq 0$ von ε, $||\varrho||_{\varepsilon,0}$ und $||\psi||'_{\varepsilon,0}$ ab. Die Summe rechts fällt für $n<0$ weg.

Beweis. Für $w'(z') = u'(x', y') + i\, v'(x', y')$ handelt es sich um das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} u'_{x'} - v'_{y'} = 0, \quad u'_{y'} + v'_{x'} = 0 \\ R^{\sigma'}(u', v') \equiv u' \cos \sigma'(s') + v' \sin \sigma'(s') = h'(s') \end{cases} \tag{23}$$

und, falls $n \geq 0$,

$$\int_{S'} h'_j(s')\, R^{\tau'}(u', v')\, ds' = \varkappa_j \quad (j = 0, 1, \ldots, 2n). \tag{24}$$

Dabei sind $h'(s') = h(s(s'))$, $\sigma'(s') = \sigma(s(s'))$ und $h'_j(s') = h_j(s(s')) \cdot \frac{ds}{ds'}$ für $n \geq 0$, $h'_j(s') = h_j(s(s'))$ für $n = 0$ gesetzt, wobei unter s' die Bogenlänge von S' verstanden wird.

[8]) Die in der z'-Ebene genommenen Normen sind mit einem Strich versehen.

Es sei $n \geqq 0$. Wir halten uns an den Beweis von Hilfssatz 2 und machen wie dort den Ansatz

$$(25) \qquad w'(z') = e^{i\omega'(z')}\left\{z'^n W'(z') + \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j \overset{j}{w}'(z')\right\}$$

($\overset{0}{w}'$ tritt hier nicht auf). Bei der Abschätzung der Funktionen ω' und W' kommen Normen $\|\sigma'\|'_{\varrho,0}$ vor (vgl. Fußnote 8), die wegen $\|\sigma'\|'_{\varrho,0} \leqq \|s(s')\|'_{\varrho,0} \cdot \operatorname{Max}_S \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|$ außer von $\sigma(s)$ nur von $\|\psi\|'_{\varrho,0}$ abhängen. Die Bestimmung der α_j führt hier auf das Gleichungssystem

$$(26) \qquad \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \int_{S'} e^{-\Im\mathfrak{m}\,\omega'(s')}\, h'_j(s')\, h_k(s')\, ds' = \varkappa_j - \int_{S'} e^{-\Im\mathfrak{m}\,\omega'(s')}\, h'_j(s')\, V'(s')\, ds'.$$

Seine Koeffizientendeterminante heißt

$$(27) \qquad \begin{cases} \Delta = \operatorname{Det}\left(\int_{S'} e^{-\Im\mathfrak{m}\,\omega'(s')}\, h'_j(s')\, h_k(s')\, ds'\right) \\ \quad = \operatorname{Det}\left(\int_S e^{-\Im\mathfrak{m}\,\omega'(s'(s))}\, h_j(s)\, h_k\big(s'(s)\big)\, ds\right). \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 1 gilt $\Delta \geqq d > 0$, und d hängt für $n = 0$ nur von $\|\omega'(s')\|'$ ab. Für $n > 0$ tritt noch eine Abhängigkeit von $\|s'(s)\|_{\beta,0}$ und $\|\omega'(s')\|'_{\beta,0}$ hinzu, wobei β eine beliebige Zahl $(0 < \beta < 1)$ bedeutet. Wir wählen $\beta = \varepsilon$; dann gilt für $n > 0$ letzten Endes $d = d(\sigma; \varepsilon, \|\varphi\|_{\varepsilon,0}, \|\psi\|'_{\varepsilon,0})$. Somit ergeben sich Abschätzungen

$$(28) \qquad |\alpha_j| \leqq \mu_1 \|h\| + \mu_2 |\varkappa_j| \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2n),$$

wobei die Schranken μ_1 und μ_2 von den gleichen Argumenten wie d abhängen.

Die beiden Zahlen λ_1 und δ seien wie in der Behauptung des Hilfssatzes 3 beschaffen. Dann gilt

$$(29) \qquad \|w\|_{\lambda_1,0} \leqq \|w'\|'_{\delta^2,0} \cdot \left(\|\varphi\|_{\delta^2,0}\right)^{\delta^2},$$

$$(30) \qquad \|h'\|'_{\delta^2,0} \leqq \|h\|_{\delta,0} \cdot \left(\|s(s')\|'_{\delta,0}\right)^{\delta}.$$

Die zu (10) und (13) entsprechenden Ungleichungen für ω' und W' und die Ungleichungen (28) liefern nunmehr in Verbindung mit der Darstellung (25) die behauptete Abschätzung (22), w. z. b. w.

Der Beweis für den Fall $n < 0$ gelingt ganz entsprechend.

Nunmehr können wir mit dem Beweis unseres Satzes beginnen. Er wird in mehreren Schritten geführt. Zunächst wird, und zwar gemeinsam für alle Fälle $n \lessgtr 0$, die Existenz bewiesen.

I. $e = e(x, y)$, $f = f(x, y)$ und $g = g(x, y)$ seien in $T + S$ zu $\mathfrak{C}^0(\varrho)$ gehörige Funktionen $(0 < \varrho < 1)$ mit $e\,g - f^2 = 1$, $e > 0$. Außerdem sollen e und g noch beschränkt sein: $e, g \leqq m_1$. Nach L. Lichtenstein [1] gibt es stets Funktionen $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, welche Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$(31) \qquad \bar{x}_x = -f(x, y)\,\bar{y}_x + e(x, y)\,\bar{y}_y, \qquad \bar{x}_y = -g(x, y)\,\bar{y}_x + f(x, y)\,\bar{y}_y$$

sind und welche darüber hinaus die folgenden Eigenschaften besitzen: Sie sind in $T+S$ aus $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ $(\varrho'<\varrho)$ und bilden — Rand in Rand, Nullpunkt in Nullpunkt — den Einheitskreis $T+S$ topologisch auf den Einheitskreis der $\bar{x}, \bar{y}$-Ebene ab. Außerdem gilt in $T+S$ durchweg $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} > 0$. Man berechnet

$$\bar{x}_x^2 + \bar{y}_x^2 = e\,\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)}, \qquad \bar{x}_y^2 + \bar{y}_y^2 = g\,\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)}, \tag{32}$$

also wegen $e, g \leqq m_1$:

$$\bar{x}_x^2 + \bar{x}_y^2 + \bar{y}_x^2 + \bar{y}_y^2 \leqq 2m_1 \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)}. \tag{33}$$

Jede solche Transformation ist eine quasikonforme Abbildung. Nach einem Satz von L. AHLFORS[9]) sind $\bar{x}(x, y)$ und $\bar{y}(x, y)$ in $T+S$ HÖLDER-stetig mit „universellen" HÖLDER-Konstanten, d.h. HÖLDER-Koeffizient und HÖLDER-Exponent $\mu_1 = \mu_1(m_1)$ hängen nur von m_1 ab. Außerdem ist, um es zu wiederholen, jede dieser Abbildungen in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ gehörig. — Die gleichen Eigenschaften besitzt die inverse Abbildung $x(\bar{x}, \bar{y})$, $y(\bar{x}, \bar{y})$.

II. In der Absicht, die Lösung des gestellten Problems (1), (2) als Fixpunkt einer geeigneten Funktionaloperation in einem noch zu definierenden BANACH-Raum zu gewinnen, gehen wir folgendermaßen vor: Wir nehmen, zunächst auf beliebige Art, in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^0(\varrho)$ gehörige Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ $(0<\varrho\leqq\lambda)$ und setzen abkürzend mit $W = \sqrt{EG-F^2}$: $EW^{-1}\big(x, y; u(x, y), v(x, y)\big) = e(x, y)$. Entsprechend sind die Bezeichnungen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ zu verstehen. e, f, g sind $T+S$ ϱ-HÖLDER-stetige Funktionen. Nun betrachten wir das lineare Randwertproblem[10]) für die gesuchten Funktionen $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$:

$$U_x = -f(x, y)\,V_x + e(x, y)\,V_y, \qquad U_y = -g(x, y)\,V_x + f(x, y)\,V_y, \tag{34}$$

außerdem die jetzt mit U und V geschriebenen Randbedingungen (2), (2a) bzw. (2), (2b). Mit einer der unter I beschriebenen, zu e, f, g gemäß (31) bestimmbaren Abbildungen $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ und den Abkürzungen $\bar{U} = U\big(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})\big)$ usw. geht (34), (2) wegen $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} > 0$ in umkehrbarer Weise über in

$$\bar{U}_{\bar{x}} - \bar{V}_{\bar{y}} = 0, \qquad \bar{U}_{\bar{y}} + \bar{V}_{\bar{x}} = 0, \tag{35}$$

$$\bar{U}\cos\bar{\sigma}(\bar{s}) + \bar{V}\sin\bar{\sigma}(\bar{s}) = \bar{h}(\bar{s}) \tag{36}$$

und die zu (2a) bzw. (2b) entsprechenden Bedingungen. Unter $\bar{s}$ verstehen wir die Bogenlänge der Kreisperipherie $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$. Außerdem haben wir $\bar{\sigma}(\bar{s}) = \sigma\big(s(\bar{s})\big)$ gesetzt. Nach dem Hilfssatz 2 besitzt dieses Problem eine eindeutig bestimmte Lösung, welche, weil die Transformation $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ aus

[9]) Siehe z.B. L. NIRENBERG [5], S. 117.

[10]) Nach dem Vorgang von L. NIRENBERG [5], der beim DIRICHLETschen Problem der quasilinearen elliptischen Differentialgleichung

$$A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = 0$$

diese Wendung der SCHAUDERschen Methode mit Erfolg benutzt hat.

$\mathfrak{C}^1(\varrho')$ ist, in $T-S$ (in Abhängigkeit von x, y!) zu $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ gehört ($\varrho' < \varrho$). Die Zuordnung $u, v \to U, V$ läßt sich somit als Funktionaloperation $(U, V) = \Psi(u, v)$ auffassen. Da jedenfalls $||\bar{\sigma}|| = ||\sigma||$ und $||\bar{h}|| = ||h||$ gilt[11]), hat man die apriori-Abschätzung

$$||U, V|| \leq \nu_S ||h|| + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j |\varkappa_j| \equiv N. \tag{37}$$

Die Summe über j fällt wie gewöhnlich weg, wenn der Index n negativ ist.

III. Wir müssen nun genauer feststellen, wovon diese Schranken ν_s und ν_j abhängen. Auf Grund des Hilfssatzes 3 bestimmen sie sich im Falle $n=0$ allein durch die mit dem Problem von vornherein gegebene Funktion $\sigma(s)$. Das gleiche gilt folglich auch für die Schranke N.

In den Fällen $n \neq 0$ tritt außerdem noch eine Abhängigkeit von den ε, 0-Normen der beiden Abbildungen $x, y \to \bar{x}, \bar{y}$ und $\bar{x}, \bar{y} \to x, y$ hinzu, wobei ε eine positive, aber sonst beliebig wählbare Zahl ist. Für $n \neq 0$ besitzen wir aber noch die Voraussetzung $E - G \leq M \mid \overline{EG - F^2}$ bzw. $e + g \leq M$. Dann können wir die in **I** eingeführte Schranke m_1 jedenfalls gleich M setzen und wissen folgendes: Wie auch die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ gewählt werden, stets sind die Abbildungen $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ HÖLDER-stetig mit Konstanten, welche sich allein aus M bestimmen. Wir identifizieren ε mit dem zugehörigen HÖLDER Exponenten $\mu_1(M)$. Dann ist auch in diesen Fällen sicher, daß die Schranke N durch die bekannten Daten des Randwertproblems von vornherein feststeht.

IV. Die in E, F und G eingesetzten Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ werden jetzt nur noch der Menge u, v mit $||u, v|| \leq N$ entnommen. Dann existiert eine Konstante $m_2 = m_2(N)$, welche sich allein durch N bestimmt, und für welche die zugehörigen Funktionen $e(x, y)$ und $g(x, y)$ kleiner als m_2 bleiben. Gemäß **I** folgt daraus die HÖLDER-Stetigkeit der Funktionen $\bar{x}(x, y)$ und $\bar{y}(x, y)$ aus (31), wobei sowohl HÖLDER-Koeffizient als auch HÖLDER-Exponent ihrerseits nur von m_2, d.h. also auch wieder nur von den Daten des Randwertproblems abhängen. *Dieser* Exponent wird jetzt mit ε bezeichnet. Es bedeutet keine Einschränkung, $0 < \varepsilon \leq \lambda$ anzunehmen. Wir wählen $\delta \leq \varepsilon$ und setzen $\lambda_1 = \delta^4$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$. Wiederum nach Hilfssatz 3 können wir auf die Abschätzung

$$||U, V||_{\lambda_1', 0} \leq N' \qquad (0 \leq \lambda_1' \leq \lambda_1) \tag{38}$$

schließen, wobei N' von der ε, 0-Norm der Abbildungen $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$, also letzten Endes auch wieder von den gegebenen Daten des Randwertproblems abhängt.

V. Es werde noch einmal zusammengefaßt: Wenn man für u und v in $T + S$ ϱ-HÖLDER-stetige Funktionen nimmt ($0 < \varrho \leq \lambda$), welche die Ungleichung $||u, v|| \leq N$ erfüllen, so ergeben sich die gemäß (34), (2) zugeordneten Funktionen U, V in $T + S$ sogar als zu $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ gehörig ($\varrho' < \varrho$). Überdies sind sie aber in allen Fällen $n \geqq 0$ universell, d.h. mit von u, v unabhängigen

[11]) Normen, welche in der $\bar{x}, \bar{y}$-Ebene zu nehmen sind, haben wir dabei durch $|| \; ||$ bezeichnet.

Konstanten, in $T+S$ λ_1-HÖLDER-stetig. Insbesondere gilt

$$||U, V|| \leq N, \quad ||U, V||_{\lambda_2, 0} \leq N', \tag{39}$$

wobei N und N' durch die Daten des Randwertproblems ein für allemal bestimmte Schranken bedeuten.

Die beschriebene Funktionaloperation $(U, V) = \Psi(u, v)$ wird nun über dem BANACH-Raum $\mathfrak{B}$ der in $T+S$ λ_2-HÖLDER-stetigen Funktionenpaare mit der λ_2, 0-Norm als Norm erklärt. Die in $\mathfrak{B}$ konvexe Menge $||u, v|| \leq N$, $||u, v||_{\lambda_2, 0} \leq N'$ wird mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

VI. Die Funktionaloperation ist in $\mathfrak{R}$ — sogar in $\mathfrak{B}$ — stetig.

Beweis. u^0, v^0 sei ein gegebenes Funktionenpaar aus $\mathfrak{B}$, e^0, f^0, g^0 seien die gemäß **II** mit seiner Hilfe definierten Funktionen und $(U^0, V^0) = \Psi(u^0, v^0)$. u^1, v^1 sei ein weiteres Paar aus der λ_2, 0-Umgebung von u^0, v^0, e^1, f^1, g^1 und U^1, V^1 seien die durch dieses entsprechend definierten Funktionen. Die besagte Umgebung werde von vornherein so beschränkt, daß $||u^1 - u^0, v^1 - v^0|| \leq 1$ gilt. Die Differenzen $U = U^1 - U^0$, $V = V^1 - V^0$ genügen dem folgenden Randwertproblem:

$$\left\{\begin{aligned} U_x + f^0 V_x - e^0 V_y &= -(f^1 - f^0) V_x + (e^1 - e^0) V_y - \\ &\quad - (f^1 - f^0) V_x^0 + (e^1 - e^0) V_y^0 \equiv r_1(x, y) \\ U_y + g^0 V_x - f^0 V_y &= -(g^1 - g^0) V_x + (f^1 - f^0) V_y - \\ &\quad - (g^1 - g^0) V_x^0 + (f^1 - f^0) V_y^0 \equiv r_2(x, y) \end{aligned}\right. \tag{40}$$

und

$$R^\sigma(U, V) = 0, \quad \int_S h_j(s)\, R^\tau(U, V)\, ds = 0 \quad \text{für} \quad n \geq 0, \tag{41a}$$

$$R^\sigma(U, V) = \sum_{j=0}^{2(n'-1)} \alpha_j h_j(s) \quad \text{für} \quad n < 0. \tag{41b}$$

Mit der zu e^0, f^0, g^0 gehörigen Koordinatentransformation, die wieder mit $\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)$ bezeichnet werde, und den Abkürzungen $U = U(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y}))$ usw. erhält man

$$\left\{\begin{aligned} \overline{U}_{\bar{x}} - \overline{V}_{\bar{y}} &= \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \bar{r}_1 + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \bar{r}_2 \equiv \overline{R}_1(\bar{x}, \bar{y}) \\ \overline{U}_{\bar{y}} + \overline{V}_{\bar{x}} &= \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \bar{r}_1 + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \bar{r}_2 \equiv \overline{R}_2(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}\right. \tag{42}$$

und die transformierten Randbedingungen (41).

u^0, v^0 ist ein fest angenommenes Paar aus $\mathfrak{B}$. Dann ist auch die Transformation $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ fest gegeben und in $T+S$ zu $\mathfrak{L}^1(\lambda_2')$ gehörig $(\lambda_2' < \lambda_2)$. Weiter gilt

$$\left\{\begin{aligned} e^1(x, y) - e^0(x, y) &= \{u^1(x, y) - u^0(x, y)\} \int_0^1 (EW^{-1})_u \times \\ &\quad \times \big(x, y; u^0 + t(u^1 - u^0), v^0 + t(v^1 - v^0)\big)\, dt + \\ &\quad + \{v^1(x, y) - v^0(x, y)\} \int_0^1 (EW^{-1})_v \times \\ &\quad \times \big(x, y; u^0 + t(u^1 - u^0), v^0 + t(v^1 - v^0)\big)\, dt \end{aligned}\right. \tag{43}$$

usw. Auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen E, F, G und wegen $||u^1, v^1|| \leq ||u^0, v^0|| + 1$ existieren eine Zahl β $(0 < \beta < \lambda_2')$ und eine Schranke m_3, welche beide von der speziellen Wahl von u^1, v^1 unabhängig sind, so daß

$$||e^1 - e^0||_{\beta,0} \leq m_3 ||u^1 - u^0, v^1 - v^0||_{\beta,0}. \tag{44}$$

Ebenso gilt

$$||f^1 - f^0||_{\beta,0}, \qquad ||g^1 - g^0||_{\beta,0} \leq m_3 ||u^1 - u^0, v^1 - v^0||_{\beta,0}. \tag{44}$$

Von den Funktionen U^0, V^0 und U^1, V^1, also auch von U, V steht fest, daß sie in $T + S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda_2')$ gehören. Es handelt sich jetzt darum, eine Abschätzung für ihre β, 1-Norm zu gewinnen. Man hat zunächst

$$||r_1, r_2||_{\beta,0} \leq 4 m_3 \cdot (||U, V||_{\beta,1} + ||U^0, V^0||_{\beta,1}) \cdot ||u^1 - u^0, v^1 - v^0||_{\beta,0}, \tag{45}$$

somit auch

$$||\overline{R}_1, \overline{R}_2||_{\beta,0} \leq m_4 \cdot (||U, V||_{\beta,1} + ||U^0, V^0||_{\beta,1}) \cdot ||u^1 - u^0, v^1 - v^0||_{\beta,0} \tag{46}$$

mit einer Schranke m_4, welche jetzt noch von der Transformation $\bar{x}(x, y)$, $\bar{y}(x, y)$, aber somit letzten Endes auch nur von u^0, v^0 abhängt. Nach den im Hilfssatz 2 bewiesenen Aussagen gilt aber weiter eine Ungleichung

$$||\overline{U}, \overline{V}||_{\beta,1} \leq \bar{\nu}_T ||\overline{R}_1, \overline{R}_2||_{\beta,0} \tag{47}$$

und deshalb wegen $||U, V||_{\beta,1} \leq \text{const} \cdot ||\overline{U}, \overline{V}||_{\beta,1}$ endlich auch

$$||U, V||_{\beta,1} \leq m_5 (||U, V||_{\beta,1} + ||U^0, V^0||_{\beta,1}) \cdot ||u^1 - u^0, v^1 - v^0||_{\lambda_2,0}. \tag{48}$$

m_5 hängt dabei von den Funktionen u^0, v^0, von β und von den Daten des Randwertproblems, nicht dagegen von u^1, v^1 ab. Man erkennt aus (48) sofort, daß man $||U, V||_{\beta,1}$ und insbesondere damit auch $||U, V||_{\lambda_2,0}$ durch genügend kleine Wahl von $||u^1 - u^0, v^1 - v^0||_{\lambda_2,0}$ beliebig klein machen kann. Das war zu beweisen.

VII. Die Funktionaloperation Ψ ist in $\mathfrak{N}$ vollstetig. Das ist klar auf Grund der Definition von $\mathfrak{B}$ und der Tatsache, daß die Bilder U, V gleichmäßig für $u, v \in \mathfrak{N}$ sogar λ_1-HÖLDER-stetig sind $(\lambda_1 = 2\lambda_2)$ und somit eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{N}$ bilden. Darin (und in der eben bewiesenen Stetigkeit) bestehen die Voraussetzungen des SCHAUDERschen Fixpunktsatzes[12]), welcher nunmehr die Existenz eines Paares u, v aus $\mathfrak{B}$ sicherstellt, das in sich übergeführt wird. Die Funktionen u, v sind dann in $T + S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda_2')$ gehörig, also Lösungen des Randwertproblems (1), (2). Jetzt ergeben sich die durch u, v definierten Funktionen $e(x, y)$, $f(x, y)$ und $g(x, y)$ aber sogar als λ-HÖLDER-stetig. Eine nochmalige Anwendung der vorangegangenen Schlußweisen garantiert somit die λ'-HÖLDER-stetige Differenzierbarkeit in $T + S$ der gefundenen Lösung u, v $(\lambda' < \lambda)$.

VIII. Eindeutigkeitsbeweis. u^1, v^1 und u^2, v^2 seien zwei Lösungen des Randwertproblems. Wieder werde $EW^{-1}(x, y; u^1(x, y), v^1(x, y)) = e^1(x, y)$

[12]) Vgl. J. SCHAUDER [7].

usw. gesetzt. Die Differenz $u = u^2 - u^1$, $v = v^2 - v^1$ ist Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_x + f^1 v_x - e^1 v_y + a u + b v = 0 \\ u_y + g^1 v_x - f^1 v_y + c u + d v = 0 \end{cases} \tag{49}$$

und

$$R^\sigma(u, v) = 0, \quad \int h_j(s)\, R^\tau(u, v)\, ds = 0 \quad \text{für} \quad n \geqq 0, \tag{50a}$$

$$R^\sigma(u, v) = \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} \alpha_j h_j(s) \quad \text{für} \quad n < 0. \tag{50b}$$

Dabei gilt

$$\begin{cases} a(x, y) = v_x^2(x, y) \int_0^1 (FW^{-1})_u \left(x, y; u^1 + t(u^2 - u^1), v^1 + t(v^2 - v^1)\right) dt - \\ \qquad - v_y^2(x, y) \int_0^1 (EW^{-1})_u \left(x, y; u^1 + t(u^2 - u^1), v^1 + t(v^2 - v^1)\right) dt, \end{cases} \tag{51}$$

und die Ausdrücke b, c, d sind entsprechend gebaut und, ebenso wie a, als bekannte Funktionen anzusehen. Mit der zu e^1, f^1, g^1 gehörigen Koordinatentransformation $\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)$ und den üblichen Abkürzungen $\bar{u} = u\left(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})\right)$ usw. erhält man das System mit CAUCHY-RIEMANNschem Hauptteil:

$$\begin{cases} \bar{u}_{\bar{x}} - \bar{v}_{\bar{y}} + (\bar{a}\, x_{\bar{x}} + \bar{c}\, y_{\bar{x}})\, \bar{u} + (\bar{b}\, x_{\bar{x}} + \bar{d}\, y_{\bar{x}})\, \bar{v} = 0 \\ \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{v}_{\bar{x}} + (\bar{a}\, x_{\bar{y}} + \bar{c}\, y_{\bar{y}})\, \bar{u} + (\bar{b}\, x_{\bar{y}} + \bar{d}\, y_{\bar{y}})\, \bar{v} = 0 \end{cases} \tag{52}$$

und außerdem die transformierten Randbedingungen (50). Die Koeffizienten von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ in (52) und die in die Randbedingungen eingehenden Funktionen sind jedenfalls HÖLDER-stetig. Dann ist aber $\bar{u} = \bar{v} \equiv 0$, d.h. auch $u = v \equiv 0$ die einzige Lösung[13]). Das war zu beweisen.

Bemerkung. Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß man statt des Einheitskreises ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet der Klasse Ah als Grundgebiet hätte nehmen können[14]). — Von den trigonometrischen Funktionen $h_j(s)$ ist hier lediglich die folgende Eigenschaft benutzt worden: Es gibt stets eine Linearkombination der $h_j(s)$, welche in vorgegebenen $2m$ $(m \leqq n)$ verschiedenen Randpunkten und sonst nirgends einen Vorzeichenwechsel besitzt. (Jede Linearkombination ohne Vorzeichenwechsel verschwindet nicht identisch.) Jedes System von $2n+1$ $(n \geqq 0)$ Funktionen dieser Art würde an Stelle der trigonometrischen Funktionen treten können.

Literatur.

[1] LICHTENSTEIN, L.: Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nicht-analytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, ser. A **1916**, 192—217. — [2] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enc. d. math. Wissensch. IIc 3, 177

[13]) Vgl. I. N. VEKUA [11], § 8.9; JOH. NITSCHE [6].

[14]) Das heißt der Tangentenwinkel seiner Randkurve soll (mit einem Exponenten $> \lambda$) Hölder-stetig sein; vgl. L. LICHTENSTEIN [2], S. 185.

bis 377. — [3] LICHTENSTEIN, L.: Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. IV. Ber. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wissensch. Leipzig **82**, 265—344 (1930). — [4] LICHTENSTEIN, L.: Neue Untersuchungen in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus. Bull. Acad. polon. Sci. A **1931**, 571 bis 598. — [5] NIRENBERG, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. p. appl. Math. **6**, 103—156 (1953). — [6] NITSCHE, JOH.: Eine charakteristische Eigenschaft der Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungssysteme. Arch. d. Math. (im Druck). — [7] SCHAUDER, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2**, 171—180 (1930). — [8] SCHAUDER, J.: Potentialtheoretische Untersuchungen. I. Abhandlung. Math. Z. **33**, 602—640 (1931). — [9] SCHAUDER, J.: Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus. Math. Ann. **106**, 661—721 (1932). — [10] SCHAUDER, J.: Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **38**, 257—282 (1934). — [11] VEKUA, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung auf die Theorie der Schalen. 880. Mat. Sbornik (N. S.) **31** (**73**). 217—314 (1952).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität.

(Eingegangen am 5. August 1954.)

PETRESCO, J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 348—356 (1954)

Sur les commutateurs.

Par
JULIAN PETRESCO.

Il s'agit d'une reconsidération des différentes notions relatives aux commutateurs dans les groupes, d'un point de vue plus général et qui, tout en restant à l'intérieur de la théorie classique, permet des développements systématiques. Nous en déduisons plusieurs relations, dont certaines généralisent les propositions de H. FITTING [4] sur l'existence des noyaux résoluble et nilpotent. Une de ces relations renferme comme cas particulier l'identité bien connue de P. HALL [1].

1. *Sur quelques définitions.* On définit le sous-groupe commutateur K d'un groupe G comme le sous-groupe engendré par les commutateurs $a \circ b = a b a^{-1} b^{-1}$, avec $a \in G$, $b \in G$, ou encore comme le sous-groupe normal minimum tel que $ab \equiv ba \bmod K$.

Si $a_i \in G$, $i < n$, considérons Πa_i et notons $\overset{\omega}{\Pi} a_i$ le produit des a_i dans un ordre ω, éventuellement différent de celui de Πa_i. *La relation: il existe un ensemble fini* $\{a_i\}$ *d'éléments de* G, *non nécessairement différents, et un ordre* ω, *tel que* $a = \Pi a_i$, $b = \overset{\omega}{\Pi} a_i$, *équivaut à:* $a \equiv b \bmod K$. Celle-là entraîne en effet celle-ci, car $\Pi a_i \equiv \overset{\omega}{\Pi} a_i \bmod K$, et réciproquement, de $a = b \bmod K$, on déduit $a = b \Pi a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, $b = b \Pi a_i a_i^{-1} b_i b_i^{-1}$. On obtient en particulier la définition suivante de K: *l'ensemble des* Πa_i *pour lesquels il existe un ordre* ω *tel que* $\overset{\omega}{\Pi} a_i = 1$.

A et B étant des sous-groupes de G, notons $K(A)$ le sous-groupe commutateur de A, et $A \cup B$ le sous-groupe engendré par A et B, dont les éléments sont de la forme $\Pi a_i b_i$, avec $a_i \in A$, $b_i \in B$.

1.1. $K(A \cup B)$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i b_i$ *avec* $\Pi a_i \in K(A)$, $\Pi b_i \in K(B)$.

Cet ensemble est un sous-groupe, car le produit $\Pi a_i b_i \Pi \alpha_j \beta_j$ $(i < n, j < m)$ de deux de ces éléments est tel que $\Pi a_i \Pi \alpha_j \in K(A)$, $\Pi b_i \Pi \beta_j \in K(B)$, et d'autre part $(\Pi a_i b_i)^{-1} = \Pi b_n^{-1}{}_i a_{n-i}^{-1}$ est tel que $\Pi a_{n-i}^{-1} = (\Pi a_i)^{-1} \in K(A)$, $\Pi b_{n-i}^{-1} \in K(B)$. Un commutateur $\Pi a_i b_i \circ \Pi \alpha_j \beta_j$ de $A \cup B$ est par ailleurs tel que $\Pi a_i \Pi \alpha_j \Pi a_n^{-1}{}_i \Pi \alpha_{m-j}^{-1} \equiv \Pi a_i \Pi a_{n-i}^{-1} \Pi \alpha_j \Pi \alpha_{m-j}^{-1} = 1 \bmod K(A)$, $\Pi b_i \Pi \beta_j \Pi b_{n-i}^{-1} \Pi \beta_{m-j}^{-1} \equiv 1 \bmod K(B)$, donc il appartient à cet ensemble. Réciproquement, on a pour un élément $\Pi a_i b_i$ de celui-ci $\Pi a_i b_i \equiv \Pi a_i \Pi b_i \bmod K(A \cup B)$, et puisque $\Pi a_i \Pi b_i \in K(A) K(B) \subseteq K(A \cup B)$, il appartient à $K(A \cup B)$.

Si l'on considère $A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^\nu$, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments de la forme $\Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu$, $a_i^\iota \in A^\iota$, $1 \leq \iota \leq \nu$, $i < n$, on déduit, plus généralement: $K(A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^\nu)$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu$ *avec* $\Pi a_i^\iota \in K(A^\iota)$.

Appelons maintenant *norme* $N(A)$ du sous-groupe A, le sous-groupe normal engendré par A; si $A \subseteq B$ notons $N_B(A)$ la norme de A dans B.

1.2. $N_{A\cup B}(A)$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i b_i$, *avec* $\Pi b_i = 1$.

On voit comme précédemment que cet ensemble est un sous-groupe. De plus il est normal dans $A \cup B$, car si $a \in A$, $b \in B$, alors $a \cdot \Pi a_i b_i \cdot a^{-1}$ est tel que $\Pi b_i = 1$ et $b \cdot \Pi a_i b_i \cdot b^{-1}$ est tel que $b \cdot \Pi b_i \cdot b^{-1} = b b^{-1} = 1$, de sorte que pour tout $\Pi \alpha_j \beta_j \in A \cup B$, $\Pi \alpha_j \beta_j \Pi a_i b_i (\Pi \alpha_j \beta_j)^{-1} = \Pi \alpha_j \beta_j \Pi a_i b_i \Pi \beta_{m-j}^{-1} \alpha_{m-j}^{-1}$ lui appartient. De l'identité

$$\Pi a_i b_i = \Pi b_1 b_2 \dots b_{i-1} a_i (b_1 b_2 \dots b_{i-1})^{-1} \cdot \Pi b_i$$

il résulte d'autre part que, si $\Pi b_i = 1$, $\Pi a_i b_i \in N_{A\cup B}(A)$, et par conséquent, l'ensemble des $\Pi a_i b_i$ avec $\Pi b_i = 1$, qui contient A, coïncide avec $N_{A\cup B}(A)$.

Puisque $A \cdot G = G$, on déduit en particulier que $N(A)$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i g_i$, *avec* $a_i \in A$, $g_i \in G$, $\Pi g_i = 1$.

Notons enfin $A \circ B$, le commutateur des sous-groupes A et B, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les $a \circ b$, avec $a \in A$, $b \in B$. $A \circ B$ *est sous-groupe normal dans* $A \cup B$, car si $\alpha \in A$, $\beta \in B$,

$$\alpha (a \circ b) \alpha^{-1} = (\alpha a) b (\alpha a)^{-1} b^{-1} \cdot b \alpha b^{-1} \alpha^{-1} \in A \circ B$$

$$\beta (a \circ b) \beta^{-1} = \beta a \beta^{-1} a^{-1} \cdot a (\beta b) a^{-1} (\beta b)^{-1} \in A \circ B,$$

et d'autre part $\alpha \cdot \Pi (a_i \circ b_i) \cdot \alpha^{-1} = \Pi \alpha (a_i \circ b_i) \alpha^{-1}$, par exemple. En particulier, $A \circ G$ *est normal dans* G.

1.3. $A \circ B$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i b_i$, *avec* $\Pi a_i = \Pi b_i = 1$.

On voit comme précédemment que cet ensemble est un sous-groupe normal dans $A \cup B$, et tout commutateur $a b a^{-1} b^{-1}$, avec $a \in A$, $b \in B$, lui appartient. Réciproquement $a b \equiv b a \bmod A \circ B$, entraîne, puisque $A \circ B$ est normal dans $A \cup B$,

$$\Pi a_i b_i \equiv \Pi a_i \Pi b_i \bmod A \circ B \tag{1}$$

de sorte que si $\Pi a_i = \Pi b_i = 1$, $\Pi a_i b_i \in A \circ B$.

(1) entraîne par ailleurs

$$A \cup B = A (A \circ B) B, \tag{1.4}$$

et si on l'applique à 1.1 et 1.2 respectivement,

$$K(A \cup B) = K(A) \cdot (A \circ B) \cdot K(B), \tag{1.5}$$

$$N_{A\cup B}(A) = A (A \circ B). \tag{1.6}$$

Si d'autre part A', A^* et B', B^* sont des sous-groupes de A et B respectivement,

$$A' (A \circ B) B' \circ A^* (A \circ B) B^* \subseteq (A' \circ A^*) (A \circ B) (B' \circ B^*), \tag{1.7}$$

car d'après (1), $A' (A \circ B) B'$ coincide avec l'ensemble des $\Pi a_i b_i$, avec $\Pi a_i \in A'$, $\Pi b_i \in B'$, et $a b \equiv b a \bmod A \circ B$, entraîne

$$\Pi a_i b_i \circ \Pi \alpha_j \beta_j \equiv (\Pi a_i \circ \Pi \alpha_j) (\Pi b_i \circ \Pi \beta_j) \bmod A \circ B.$$

2. *Les opérations* $K^i, \overline{K}$. Considérons la chaîne des sous-groupe commutateurs successifs de A, définie par $K^i(A) = K[K^{i-1}(A)]$, $K^1(A) = K(A)$.

2.1. *On a* $K^i(A \cup B) \subseteqq K^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^i(B)$.

Si en effet $K^{i-1}(A \cup B) \subseteqq K^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^{i-1}(B)$, on a en appliquant (1.7), $K^i(A \cup B) = K^{i-1}(A \cup B) \circ K^{i-1}(A \cup B) \subseteqq [K^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^{i-1}(B)] \circ [K^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^{i-1}(B)] \subseteqq [K^{i-1}(A) \circ K^{i-1}(A)] \; (A \circ B) \; [K^{i-1}(B) \circ K^{i-1}(B)] = K^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^i(B)$, et 2.1 résulte de (1.5) par récurrence.

Si G est un groupe à condition de chaînes descendantes pour les sous-groupes normaux, il existe un nombre n, que nous appellerons *degré résoluble* de A, tel que $K^{n-1}(A) \neq K^n(A) = K^{n+1}(A) = \cdots$. Si $K^n(A) = 1$, A est appelé *résoluble*. Nous appellerons par ailleurs *anti-résoluble* un sous-groupe A tel que $K(A) = A$.

Si A et B sont anti-résolubles, $A \cup B = K(A) \cup K(B) \subseteqq K(A \cup B)$, et par conséquent, *la réunion de deux sous-groupes anti-résolubles est un sous-groupe anti-résoluble.* $K^n(A)$ est donc le sous-groupe anti-résoluble maximum de A, et nous l'appellerons *noyau anti-résoluble* de A en le notant $\overline{K}(A)$; si $A \subseteqq B$, $\overline{K}(A) \subseteqq \overline{K}(B)$.

2.2. *On a* $\overline{K}(A \cup B) \subseteqq \overline{K}(A) \cdot (A \circ B) \cdot \overline{K}(B)$.

Si m et n sont les degrés résolubles de A et B, ceci résulte de 2.1, pour $i = \max(m, n)$.

2.3. *On a* $K^i(A \cup B) \subseteqq K^i(A) \cdot N_{A \cup B}(B)$.

Ceci résulte également de 2.1, car d'après (1.6), $(A \circ B) \cdot K^i(B) \subseteqq (A \circ B) B = N_{A \cup B}(B)$.

En particulier: *si B est normal, $K^i(AB) \subseteqq K^i(A) \cdot B$; si B est normal et anti-résoluble, $K^i(AB) = K^i(A) \cdot B$.*

2.4. *On a* $\overline{K}(A \cup B) = N_{A \cup B}[\overline{K}(A)] \cdot \overline{K}(A \circ B) \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(B)]$.

Soit i le degré résoluble de $A \circ B$. En tenant compte de 2.2, 2.3 et de la relation évidente $N(A \cup B) = N(A) N(B)$, on a succesivement $\overline{K}(A \cup B) = K^i[\overline{K}(A \cup B)] \subseteqq K^i[(A \circ B) \cdot \overline{K}(A) \overline{K}(B)] \subseteq K^i\{(A \circ B)[\overline{K}(A) \cup \overline{K}(B)]\} \subseteqq K^i(A \circ B) \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(A) \cup \overline{K}(B)] = \overline{K}(A \circ B) \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(A)] \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(B)]$, tandis que l'inclusion réciproque est évidente.

En particulier:

2.5. *Si A et B sont résolubles,* $\overline{K}(A \cup B) = \overline{K}(A \circ B)$.

2.6. *Si A et B sont normaux,* $\overline{K}(AB) = \overline{K}(A) \overline{K}(B)$.

3. *Les opérations* $O^i, \overline{O}$. Considérons la chaîne centrale descendante relative au sous-groupe A, définie par $O^i(A) = O^{i-1}(A) \circ A$, $O^1(A) = A \circ A$.

3.1. *On a* $O^i(A \cup B) \subseteqq O^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot O^i(B)$.

Si en effet $O^{i-1}(A \cup B) \subseteqq O^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot O^{i-1}(B)$, on a d'après (1.4) et (1.7), $O^i(A \cup B) = O^{i-1}(A \cup B) \circ (A \cup B) \subseteqq [O^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot O^{i-1}(B)] \circ [A(A \circ B) B] \subseteqq [O^{i-1}(A) \circ A] \; (A \circ B) \; [O^{i-1}(B) \circ B] = O^i(A) \; (A \circ B) \; O^i(B)$.

Si G satisfait à la condition des chaînes descendantes, il existe un nombre n, que nous appellerons *degré nilpotent* de A, tel que $O^{n-1}(A) \neq O^n(A) = O^{n+1}(A) = \cdots$. Si $O^n(A) = 1$, A est appelé *nilpotent* (de classe n).

Notons par ailleurs $O^i_G(A) = O^{i-1}_G(A) \circ G$, $O^1_G(A) = A \circ G$. On définit de façon analogue le *degré G-nilpotent* n de A et on dira que A est *G-nilpotent* si $O^n_G(A) = 1$. Si A et B sont normaux

$$AB \circ G = (A \circ G)(B \circ G) \tag{2}$$

et puisque $A \circ G$ et $B \circ G$ sont également normaux, on déduit par récurrence, $O^i_G(AB) = O^i_G(A)\, O^i_G(B)$; il résulte que *le produit de deux sous-groupes normaux G-nilpotents est G-nilpotent* et l'existence du *noyau G-nilpotent* de G.

Appelons maintenant *G-anti-nilpotent* un sous-groupe A, nécessairement normal, tel que $A \circ G = A$. D'après (2), *le produit de deux sous-groupes G-anti-nilpotents est G-anti-nilpotent.*

Dans le cas du groupe A, on voit dans ces conditions que $O^n(A)$ est le sous-groupe A-anti-nilpotent maximum, que nous appellerons *noyau A-anti-nilpotent* de A en le notant $\overline{O}(A)$. On peut également définir $\overline{O}(A)$ comme l'intersection des sous-groupes normaux A' de A tels que A/A' soit nilpotent[1]). Si $A \subseteq B$, $\overline{O}(A) \subseteq \overline{O}(B)$.

3.2. *On a* $\overline{O}(A \cup B) \subseteq \overline{O}(A) \cdot (A \circ B) \cdot \overline{O}(B)$.

Ceci résulte de 3.1, comme 2.2 de 2.1.

Considérons les sous-groupes C_i, $1 \leq i \leq n$, de G et notons $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i \leq n-1}{\Omega}(C_i) \circ C_n$, $\underset{i=1}{\Omega}(C_i) = C_1$.

3.3. *Si* $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_m}$, *avec* $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$, *sont normaux,* $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteq \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j})$.

(a) *Si* C_1 *est normal,* $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteq C_1$; si en effet $\underset{i \leq n-1}{\Omega}(C_i) \subseteq C_1$, $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i \leq n-1}{\Omega}(C_i) \circ C_n \subseteq C_1 \circ C_n \subseteq C_1$.

(b) *Si* C_j, $1 \leq j \leq n$, *est normal,* $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteq C_j$; on a $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{j \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k)$ où $\Gamma_j = \underset{i \leq j-1}{\Omega}(C_i) \circ C_j \subseteq C_j$ et si $k > j$, $\Gamma_k = C_k$, donc d'après (a), $\underset{j \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k) \subseteq \underset{j \leq k \leq n}{\Omega}(C_k) \subseteq C_j$.

D'après (b), 3.3 est donc vraie pour tout n et pour $m = 1$. Si maintenant $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteq \underset{j \leq m-1}{\Omega}(C_{i_j})$, pour tout n, on a $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i_m \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k)$, où $\Gamma_{i_m} = \underset{i \leq i_m - 1}{\Omega}(C_i) \circ C_{i_m}$ et si $k > i_m$, $\Gamma_k = C_k$. Mais d'après l'hypothèse, $\Gamma_{i_m} \subseteq \underset{j \leq m-1}{\Omega}(C_{i_j}) \circ C_{i_m} = \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j})$, de sorte que si on note $\Gamma'_{i_m} = \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j})$ et $\Gamma'_k = C_k$ pour $k > i_m$, on a en appliquant (a),

$$\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i_m \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k) \subseteq \underset{i_m \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma'_k) \subseteq \Gamma'_{i_m} = \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j}).$$

En appliquant maintenant la loi de distributivité (2), on montre par récurrence que si A et B sont normaux,

$$O^i(AB) = \underset{C_j = A, B}{\Pi} \left[\underset{j \leq i}{\Omega}(C_j) \right] \tag{3}$$

où le produit est formé par les sous-groupes (normaux) obtenus en remplaçant dans $\underset{j \leq i}{\Omega}(C_j)$, C_j par A ou B, de toutes les façons possibles.

[1]) H. Zassenhaus [2], p. 122.

3.4. *Si A et B sont normaux, $O^{2i}(AB) \subseteq O^i(A)\, O^i(B)$.*

Soit α le nombre des C_j égaux à A et β le nombre des C_j égaux à B, dans $\underset{\leq 2i}{\Omega}(C_j)$. On a $\alpha+\beta=2i$, de sorte que $\max(\alpha,\beta)\geq i$, et d'après 3.3, $\underset{j\leq 2i}{\Omega}(C_j)\subseteq O^\alpha(A)\cap O^\beta(B)$. Il en résulte que soit $\underset{j\leq 2i}{\Omega}(C_j)\subseteq O^i(A)$, soit $\underset{j\leq 2i}{\Omega}(C_j)\subseteq O^i(B)$. Mais alors, en appliquant (3), et puisque $O^i(A)$ et $O^i(B)$ sont normaux, on obtient 3.4. On déduit enfin de celle-ci:

3.5. *Si A et B sont normaux, $\overline{O}(AB)=\overline{O}(A)\,\overline{O}(B)$.*

4. *Sur les formes commutatrices.* Soit $I=\{1, 2, \ldots, \nu\}$ un ensemble fini d'indices et $E=\{A^1, A^2, \ldots, A^\nu\}$ un ensemble de sous-groupes, non nécessairement différents, de G. Considérons un élément quelconque de $E^0=A^1\cup A^2\cup\cdots\cup A^\nu$, soit $a=\Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu$, avec $a_i^\varkappa\in A^\varkappa$, $\varkappa\in I$, $i<n$. Si I^ι, $\iota\leq\nu$, est un sous-ensemble de ι éléments de I, soit $I^\iota=\{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\iota\}$, nous notons I^ι (a), le produit obtenu en égalant à 1, tout élément $a_i^\varkappa$ de l'expression de a pour lequel $\varkappa\notin I^\iota$, c'est-à-dire que $I^\iota(a)=\Pi a_i^{\varkappa_1} a_i^{\varkappa_2}\ldots a_i^{\varkappa_\iota}$. La notation $I^\iota(a)$ est relative, non pas à l'élément a, mais à un représentation donnée de a dans E^0.

Notons par ailleurs $E^\varkappa$ ou $E^\varkappa(A^1, \ldots, A^\nu)$ l'ensemble des éléments $a\in E^0$, dont il existe une représentation telle que $I^\iota(a)=1$, quels que soient $\iota\leq\varkappa$ et $I^\iota\subseteq I$. On a évidemment $E^{\nu-1}\subseteq\cdots\subseteq E^\varkappa\subseteq\cdots\subseteq E^1\subseteq E^0$. De plus:

4.1. *$E^\varkappa$ est un sous-groupe normal de E^0.*

Si $\alpha=\Pi\alpha_j^1\alpha_j^2\ldots\alpha_j^\nu$, $\alpha^\varkappa\in A^\varkappa$, $\varkappa\in I$, $j<m$, ceci résulte des relations:

$$I^\iota(a\,\alpha)=\Pi a_i^{\varkappa_1}\ldots a_i^{\varkappa_\iota}\,\Pi\alpha_j^{\varkappa_1}\ldots\alpha_j^{\varkappa_\iota}=I^\iota(a)\cdot I^\iota(\alpha)$$

$$I^\iota(a^{-1})=\Pi(a_{n-i}^{\varkappa_\iota})^{-1}\ldots(a_{n-i}^{\varkappa_1})^{-1}=(\Pi a_i^{\varkappa_1}\ldots a_i^{\varkappa_\iota})^{-1}=[I^\iota(a)]^{-1}$$

$$I^\iota[\alpha^\varkappa a(\alpha^\varkappa)^{-1}]=\alpha^\varkappa\cdot\Pi a_i^{\varkappa_1}\ldots a_i^{\varkappa_\iota}\cdot(\alpha^\varkappa)^{-1}=\alpha^\varkappa[I^\iota(a)](\alpha^\varkappa)^{-1};\qquad \varkappa\in I^\iota$$

$$I^\iota[\alpha^\varkappa a(\alpha^\varkappa)^{-1}]=\Pi a_i^{\varkappa_1}\ldots a_i^{\varkappa_\iota}=I^\iota(a);\qquad \varkappa\notin I^\iota.$$

Soit maintenant $\Phi(A^1, A^2, \ldots, A^\nu)$ une forme commutatrice de poid ν.

4.2. *On a $\Phi(A^1, A^2, \ldots, A^\nu)\subseteq E^{\nu-1}(A^1, A^2, \ldots, A^\nu)$.*

D'après 1.3 ceci est vrai pour $\nu=2$. Supposons que la relation soit vraie pour tout $\nu'<\nu$. D'après la définition des formes commutatrices

$$\Phi(A^1, \ldots, A^\nu)=\Phi_1(\ldots, A^{\varkappa_1}, \ldots)\circ\Phi_2(\ldots, A^{\varkappa_2}, \ldots)$$

où $\varkappa_1\in I_1$, $\varkappa_2\in I_2$, $I_1\cap I_2=0$, $I_1\cup I_2=I$. Il s'ensuit que tout élément $\varphi\in\Phi$ est de la forme $\varphi=\Pi\varphi_k^1\varphi_k^2$, où d'après 1.3, $\Pi\varphi_k^1=\Pi\varphi_k^2=1$, et d'après l'hypothèse, $\varphi_k^1=\Pi\ldots a_i^{\varkappa_1}\ldots$, avec $I_1'(\varphi_k^1)=1$, pour tout $I_1'\subset I_1$, $\varphi_k^2=\Pi\ldots a_i^{\varkappa_2}\ldots$, avec $I_2'(\varphi_k^2)=1$, pour tout $I_2'\subset I_2$. Si $I^\iota\subset I$,

$$I^\iota(\varphi)=\Pi I^\iota(\varphi_k^1)\, I^\iota(\varphi_k^2)=\Pi(I_1\cap I^\iota)(\varphi_k^1)\cdot(I_2\cap I^\iota)(\varphi_k^2)\ ^{2}).$$

Quatre cas sont à distinguer:

(a) $I_1\cap I^\iota\subset I_1$, $I_2\cap I^\iota\subset I_2$; on a $(I_1\cap I^\iota)\ (\varphi_k^1)=(I_2\cap I^\iota)(\varphi_k^2)=1$, donc $I^\iota(\varphi)=1$.

[2]) $(I_1\cap I^\iota)\ (\varphi_k^1)$ signifie que l'opération $I_1\cap I^\iota$ est appliquée à φ_k^1.

(b) $I_1 \cap I^\iota = I_1$, $I_2 \cap I^\iota \subset I_2$; on a $(I_1 \cap I^\iota)(\varphi_k^1) = I_1(\varphi_k^1) = \varphi_k^1$, $(I_2 \cap I^\iota)(\varphi_k^2) = 1$, donc $I^\iota(\varphi) = \Pi \varphi_k^1 = 1$.

(c) $I_1 \cap I^\iota \subset I_1$, $I_2 \cap I^\iota = I_2$; $I^\iota(\varphi) = \Pi \varphi_k^2 = 1$.

(d) $I_1 \cap I^\iota = I_1$, $I_2 \cap I^\iota = I_2$; on a $I_1 \subseteqq I^\iota$, $I_2 \subseteqq I^\iota$, donc $I = I_1 \cap I_2 \subseteqq I^\iota$, ce qui est contradictoire.

On conclut que pour la représentation donnée de φ, $I^\iota(\varphi) = 1$, quel que soit $I^\iota \subset I$, donc $\varphi \in E^{\nu-1}$ et en définitive $\Phi \subseteqq E^{\nu-1}$ pour tout ν.

Soit maintenant $\Phi(A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}, \ldots, A^{\lambda_w})$ une forme commutatrice de poid w, l'ensemble $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_w\}$ étant composé d'indices, non nécessairements différents, appartenant à I. Nous dirons que le nombre des classes de L par rapport à l'égalité dans I, est l'*indice* de Φ par rapport à E. Notons $\Phi^\lambda(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w})$ une forme d'indice λ; on a $\lambda \leqq w$.

4.3. *On a* $\Phi^\lambda(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w}) \subseteqq E^{\lambda-1}(A^1, \ldots, A^\nu)$.

D'après 4.2, $\Phi^\lambda(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w}) \subseteqq E^{w-1}(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w})$; d'autre part un élément $a \in E^{w-1}$ est de la forme $a = \Pi a_i^{\lambda_1} \ldots a_i^{\lambda_w}$, $a_i^{\lambda_v} \in A^{\lambda_v}$, $\lambda_v \in L$, avec $L^v(a) = 1$, pour tout $L^v \subset L$. Notons $L \wedge I^\iota$, l'ensemble des éléments de L égaux à des éléments de I^ι. Si $\iota \leqq \lambda - 1$, $L \wedge I^\iota \subset L$, de sorte que $I^\iota(a) = (L \wedge I^\iota)(a) = 1$, donc $a \in E^{\lambda-1}(A^1, \ldots, A^\nu)$.

5. *Agrégats commutateurs.* Nous allons appeler *agrégat commutateur* d'indice $\varkappa$, la réunion[3]) des formes commutatrices Φ^σ d'indice $\sigma > \varkappa$ par rapport à E, que nous noterons $O^\varkappa$ ou $O^\varkappa(A^1, \ldots, A^\nu)$; on a $O^{\nu-1} \subseteqq \cdots \subseteqq O^\varkappa \subseteqq \cdots \subseteqq O^1 \subseteqq O^0 = E^0$.

5.1. *On a* $E^\varkappa = O^\varkappa$, $\varkappa < \nu$.

Nous allons montrer tout d'abord que si $a \in E^\varkappa$, toute représentation $a = \Pi a_i^1 \ldots a_i^\nu$, avec $I^\iota(a) = 1$, quels que soient $\iota \leqq \varkappa$, $I^\iota \subseteqq I$, peut être mise sous la forme

$$a = \prod_j \prod_{\sigma > \varkappa} \varphi_j(I^\sigma) \tag{4}$$

où, si $I^\sigma = \{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\sigma\}$, $\varphi_j(I^\sigma)$ est un produit formé avec les $a_i^{\varkappa_1}, \ldots, a_i^{\varkappa_\sigma}$ de l'expression de a, tel que si $I^{\sigma'} \subset I^\sigma$, $I^{\sigma'}[\varphi_j(I^\sigma)] = 1$, et qui appartient à une forme commutatrice $\Phi_j^\sigma(I^\sigma) \subseteqq O^\sigma$, le produit $\prod_{\sigma > \varkappa}$ étant étendu à tous les $I^\sigma \subseteqq I$, avec $\sigma > \varkappa$.

Si (4) est vraie pour $E^{\varkappa-1}$, une représentation $a = \Pi a_i^1 \ldots a_i^\nu$ avec $I^\iota(a) = 1$, $\iota \leqq \varkappa$, de $a \in E^\varkappa \subseteqq E^{\varkappa-1}$ se ramène à la forme $a = \prod_j \prod_{\sigma > \varkappa - 1} \varphi_j(I^\sigma)$, avec $I^{\sigma'}[\varphi_j(I^\sigma)] = 1$, et on a dans ce cas

$$I^\varkappa[\varphi_j(I^\sigma)] = [I^\varkappa \cap I^\sigma][\varphi_j(I^\sigma)] = \begin{cases} 1; & I^\sigma \neq I^\varkappa \\ \varphi_j(I^\varkappa); & I^\sigma = I^\varkappa \end{cases}$$

de sorte que

$$1 = I^\varkappa(a) = \prod_j \prod_{\sigma > \varkappa - 1} I^\varkappa[\varphi_j(I^\sigma)] = \prod_j \varphi_j(I^\varkappa). \tag{5}$$

A partir de l'identité $ab = (a \circ b)\, ba$, on peut maintenant remaner à droite, successivement et dans l'ordre indiqué ci-dessous, tous les $\varphi_j(I^\varkappa)$ de l'expression de a, comme dans la première étape du procédé de collectage (à droite) de

[3]) Dans le treillis des sous-groupes de G.

P. HALL [1], et on a

$$a = \prod_{k} \prod_{\varrho > \varkappa} \psi_k(I^\varrho) \cdot \prod_{\varkappa} \prod_{j} \varphi_j(I^\varkappa) \tag{6}$$

où $\psi_k(I^\varrho) = \underset{r}{\Omega} \varphi_{j_r}(I^{\sigma_r})$, $\sigma_r > \varkappa - 1$, $\underset{r}{\cup} I^{\sigma_r} = I^\varrho$, deux ensemble I^{σ_r} au moins étant différants donc $\varrho > \varkappa$. On voit dans ces conditions, que $\psi_k(I^\varrho)$ appartient à une forme commutatrice d'indice $\varrho > \varkappa$, donc $\psi_k(I^\varrho) \in O^\varkappa$. D'autre part si $I^{\varrho'} \subset I^\varrho$, il existe r tel que $I^{\sigma_r} \not\subseteq I^{\varrho'}$, donc tel que $I^{\varrho'} \cap I^{\sigma_r} \subset I^{\sigma_r}$, et par conséquent pour ce r, $[I^{\varrho'} \cap I^{\sigma_r}]\,[\varphi_{j_r}(I^{\sigma_r})] = 1$, d'où on déduit

$$I^{\varrho'}[\psi_k(I^\varrho)] = \underset{r}{\Omega} [I^{\varrho'} \cap I^{\sigma_r}]\,[\varphi_{j_r}(I^{\sigma_r})] = 1.$$

(4) résulte maintenant de (6), si l'on tient compte du fait que (5) entraîne $\prod_{\varkappa} \prod_{j} \varphi_j(I^\varkappa) = 1$. Puisque d'autre part (4), est trivialement vraie pour $a \in E^0$, elle est, de ce fait, démontrée par récurrence.

Mais dans (4), $\varphi_j(I^\sigma) \in O^\sigma \subseteq O^\varkappa$, donc $a \in O^\varkappa$. Réciproquement $O^\varkappa \subseteq E^\varkappa$, résulte de 4.1 et 4.3.

Nous allons pouvoir démontrer maintenant la généralisation suivante de (1.4):

5.2. *On a*

$$E^0 = \prod_{\varkappa_1} A^{\varkappa_1} \cdot \prod_{\varkappa_1, \varkappa_2} O^1(A^{\varkappa_1}, A^{\varkappa_1}) \dots \prod_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda} O^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1}, \dots, A^{\varkappa_\lambda}) \dots O^{\nu-1}.$$

Choisissons tout d'abord un ordre fixe, mais autrement arbitraire, pour les produits $\prod_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda}$ et soit $a = \Pi a_i^1 \dots a_i^\nu \in E^0$. Notons $I_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda} = \{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda\}$ et posons $c(\varkappa_1) = I_{\varkappa_1}(a)$, $p_1 = \prod_{\varkappa_1} c(\varkappa_1)$. Les relations

$$c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda) = I_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}^{-1} a)$$

$$p_\lambda = p_{\lambda-1} \cdot \prod_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda} c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)$$

définissent $c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)$ et p_λ pour tout $\lambda < \nu$. On a évidemment

$$c(\varkappa_1) \in A^{\varkappa_1}$$

et d'autre part

$$I_\varkappa(p_1^{-1} a) = 1, \quad \varkappa \in I$$

car $I_\varkappa(p_1^{-1} a) = \overset{\omega}{\underset{\varkappa_1}{\Pi}} \{I_\varkappa[c(\varkappa_1)]\}^{-1} \cdot I_\varkappa(a) = \overset{\omega}{\underset{\varkappa_1}{\Pi}} \{I_\varkappa[I_{\varkappa_1}(a)]\}^{-1} \cdot I_\varkappa(a)$, et

$$I_\varkappa[I_{\varkappa_1}(a)] = \begin{cases} 1; & \varkappa_1 \neq \varkappa \\ I_\varkappa(a); & \varkappa_1 = \varkappa \end{cases}$$

de sorte que $I_\varkappa(p_1^{-1} a) = [I_\varkappa(a)]^{-1} \cdot I_\varkappa(a) = 1$, pour tout $\varkappa \in I$.

Supposons maintenant que

$$I^\iota[c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{\lambda-1}) = 1, \quad I^\iota \subset I_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_{\lambda-1}} \tag{7'}$$

$$I^\iota(p_{\lambda-1}^{-1} a) = 1, \quad \iota \leq \lambda - 1. \tag{8'}$$

Si $I' \in I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}$, on déduit de (8')

$$I'[c(\varkappa_1, \ldots; \varkappa_\lambda)] = I'[I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}^{-1} a)] = I'(p_{\lambda-1}^{-1} a) = 1. \tag{7}$$

On a cependant

$$p_\lambda^{-1} a = \overset{\omega}{\underset{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}{\Pi}} [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)]^{-1} \cdot p_{\lambda-1}^{-1} a.$$

Mais si $\iota < \lambda$, $I^\iota \cap I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} < I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}$, et d'après (7)

$$I^\iota [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)] = [I^\iota \cap I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}] [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)] = 1$$

de sorte qu'en tenant compte de (8')

$$I^\iota (p_\lambda^{-1} a) = 1, \qquad \iota < \lambda.$$

D'autre part

$$I^\lambda [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)] = \begin{cases} 1; & I^\lambda \neq I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \\ c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda); & I^\lambda = I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \end{cases}$$

et part conséquent

$$I^\lambda (p_\lambda^{-1} a) = [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)]^{-1} \cdot I^\lambda (p_{\lambda-1}^{-1} a) = [I^\lambda (p_{\lambda-1}^{-1} a)]^{-1} \cdot I^\lambda (p_{\lambda-1}^{-1} a) = 1.$$

Finalement

$$I^\iota (p_\lambda^{-1} a) = 1, \qquad \iota \leqq \lambda \tag{8}$$

de sorte que (7) et (8) sont valables pour tout $\lambda < \nu$.

De (8) on déduit maintenant $a \equiv p_\lambda \bmod E^\lambda$, donc d'après 5.1

$$a \equiv p_\lambda \bmod O^\lambda, \qquad \lambda < \nu$$

c'est-à-dire qu'en particulier

$$a = p_{\nu-1} \cdot c(1, \ldots, \nu) = \underset{\varkappa_1}{\Pi} c(\varkappa_1) \cdot \underset{\varkappa_1, \varkappa_2}{\Pi} c(\varkappa_1, \varkappa_2) \ldots c(1, \ldots, \nu)$$

où, d'après (7) et 5.1, $c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda) \in E^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1}, \ldots, A^{\varkappa_\lambda}) = O^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1}, \ldots, A^{\varkappa_\lambda})$, $1 \leqq \lambda < \nu$, $c(1, \ldots, \nu) \in E^{\nu-1} = O^{\nu-1}$, et en définitive 5.2.

5.3. *La suite définie par*

$$c_\lambda = c_{\lambda-1}^{-\binom{\lambda}{\lambda-1}} \ldots c_2^{-\binom{\lambda}{2}} b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^\lambda, \qquad c_2 = b^{-2} a^{-2} (ab)^2, \qquad c_1 = 1$$

est telle que $c_\lambda \in O^{\lambda-1}\{a, b\}$.

Nous allons montrer que si on prend, dans la démonstration de 5.2, $A^\varkappa = \{a, b\}$, $a_1^\varkappa = b^{-1}$, $a_2^\varkappa = a^{-1}$, $a_3^\varkappa = ab$, $1 \leqq \varkappa \leqq \nu$, on obtient en considérant l'élément

$$\alpha = \Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu = b^{-\nu} a^{-\nu} (ab)^\nu, \qquad i = 1, 2, 3$$

de $E^0 = \{a, b\}$, l'égalité suivante:

$$c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda) = c_\lambda, \tag{9}$$

quel que soit le sous-ensemble $\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda\}$ de λ éléments de I.

Supposons en effet que l'égalité ait lieu pour tout $\lambda' < \lambda$. D'après l'hypothèse et la relation (7) de 5.2,

$$I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}[c(\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'})] = \begin{cases} 1\,; & I_{\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'}} \nsubseteq I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda} \\ c_{\lambda'}\,; & I_{\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'}} \subseteq I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}. \end{cases}$$

La seconde alternative se vérifie pour $\binom{\lambda}{\lambda'}$ sous-ensembles $I_{\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'}}$ de λ' éléments de I, de sorte que

$$I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}) = I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}\Big[\prod_{\varkappa_1} c(\varkappa_1)\ldots \prod_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{\lambda-1}} c(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{\lambda-1})\Big]$$
$$= c_2^{\binom{\lambda}{2}}\, c_3^{\binom{\lambda}{3}} \ldots c_{\lambda-1}^{\binom{\lambda}{\lambda-1}}$$

et en définitive, puisque $I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}(\alpha) = b^{-\lambda}\, a^{-\lambda}(ab)^\lambda$,

$$c(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda) = I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}^{-1}\,\alpha) = c_{\lambda-1}^{-\binom{\lambda}{\lambda-1}} \ldots c_2^{-\binom{\lambda}{2}}\, b^{-\lambda}\, a^{-\lambda}(ab)^\lambda = c_\varkappa.$$

On déduit que (9) est valable pour tout $\lambda < \nu$. Mais au cours de la démonstration de 5.2, $c(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda) \in O^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1},\ldots,A^{\varkappa_\lambda}) = O^{\lambda-1}\{a, b\}$, de sorte que

$$c_\lambda \in O^{\lambda-1}\{a, b\},$$

pour tout $\lambda < \nu$, et puisque la relation a lieu pour tout ν elle est valable pour tout λ. On en déduit l'identité de P. HALL [1]:

$$(ab)^\lambda = a^\lambda\, b^\lambda\, c_2^{\binom{\lambda}{2}} \ldots c_{\lambda-1}^{\binom{\lambda}{\lambda-1}}\, c_\lambda$$

avec $c_\varkappa \in O^{\varkappa-1}\{a, b\}$, $2 \leq \varkappa \leq \lambda$, sous la forme donnée par W. MAGNUS [3] et généralisée par M. LAZARD [5].

Références.

[1] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power orders. Proc. Lond. Math. Soc., II **36**, 29—95 (1933). — [2] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig 1937. — [3] MAGNUS, W.: Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. J. reine angew. Math. **177**, 105—115 (1937). — [4] FITTING, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jahresber. Deutsch. Math. Verein. **48**, 77—141 (1938). — [5] LAZARD, M.: Sur certaines suites d'éléments dans les groupes libres et leurs extensions. C. R. Ac. Sci. Fr. **236**, 36—38 (1953).

8 rue Pascal, Montrouge (Seine), France.

(Eingegangen am 20. September 1954.)

MAY CIRCULATE

Soeben erschien:

Kurzes Lehrbuch der Physik

Von Professor Dr. **H. A. Stuart,** Gastprofessor an der Universität Mainz, früher Direktor des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule Dresden. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 380 Abbildungen. VII, 304 Seiten Gr.-8°. 1954.
Ganzleinen DM 19.80

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **Mechanik.** Allgemeiner Teil: Längen, Winkel, Zeiten. Darstellung von Bewegungen. Kraft und Masse. Arbeit und Energie. Kräfte im Gleichgewicht (Statik): Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Schwerpunkt und Gleichgewicht. Maschinen. Lehre von der Bewegung unter dem Einfluß von Kräften (Dynamik): Grundsätze der Dynamik. Einige besondere Bewegungsformen. Drehbewegung starrer Körper. Allgemeine Gravitation. Die mechanischen Eigenschaften der drei Aggregatzustände als Folge des molekularen Aufbaus der Materie und der molekularen Kräfte. Der molekulare Aufbau der Materie und die molekularen Kräfte. Der feste Körper. Ruhende Flüssigkeiten. Ruhende Gase. Bewegungen in Flüssigkeiten und Gasen (Hydro- und Aerodynamik). **Schwingungs- und Wellenlehre. Akustik:** Allgemeines über Schwingungen und Wellen. Akustik. — **Wärmelehre:** Thermometrie, Wärmeausdehnung, Kalorimetrie. Wärme und Arbeit. Änderungen des Aggregatzustandes. Wärmeausbreitung. — **Elektrizität und Magnetismus:** Elektrostatik. Allgemeine Eigenschaften des elektrischen Stromes und Meßmethoden. Strom und Wärme. Das magnetische Feld. Elektrizitätsleitung in Flüssigkeiten. Elektrizitätsleitung in Gasen und im Vakuum. Elektromagnetische Induktion. Magnetische Eigenschaften der Stoffe. Anwendungen der Induktion. Elektrische Schwingungen und Wellen. — **Optik und allgemeine Strahlungslehre:** Das Wesen des Lichtes und seine Ausbreitung. Geometrische Optik: Grunderscheinungen der geometrischen Optik. Bilderzeugung durch Spiegel und Linsen. Das Auge und das Sehen. Optische Instrumente. Wellenoptik: Interferenzerscheinungen. Beugung des Lichtes. Polarisation. Elektromagnetisches Spektrum: Ultrarotes und ultraviolettes Spektralgebiet. Röntgenstrahlen. Strahlung und Materie: Temperatur- und Luminiszenzstrahlung. Teilcheneigenschaften des Lichtes. — **Atombau:** Die Spektren und die Elektronenhülle der Atome. Der Atomkern und seine Umwandlungen. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Gegenüber der vorhergehenden Auflage ist der Abschnitt „Der Atomkern und seine Umwandlungen" neu geschrieben und in das Kapitel über Atombau eingefügt worden. Auch kleine Abschnitte wie die Paragraphen über die Röntgenstrahlen sind umgearbeitet worden. Eine Reihe von praktischen Hinweisen wurde eingefügt und Mängel hinsichtlich der Einheitlichkeit der benutzten Maßsysteme und solche kriegsbedingter Art wurden beseitigt. Aus den Besprechungen der 2. und 3. Auflage:

„... Nach Absicht des Verf. ist hiermit ein modernes Buch geschaffen für Studierende, welche Physik als Hilfswissenschaft betreiben. Diesem Zweck dienen der klare Aufbau des Buches und eine sichere Ordnung in den einzelnen Kapiteln. In sehr knappen Sätzen werden zu Beginn eines jeden Abschnittes die Definitionen und grundlegenden Beobachtungen festgelegt, worauf die Beschreibung der einzelnen physikalischen Erscheinungen folgt. Die zum Verständnis unbedingt notwendigen theoretischen Lehrsätze und Grundgesetze werden folgerichtig in kurzer Form entwickelt, manchmal allerdings nur angedeutet. Um den mathematisch ungeschulten Leser nicht unnötig zu belasten, wird von der physikalischen Formelsprache nur sparsam Gebrauch gemacht; die Ableitung wichtiger Formeln erfolgt mit einfachsten mathematischen Mitteln. Auch Tabellen sind nur herangezogen, wenn sie unmittelbar der Veranschaulichung dienen. Wichtige physikalische Daten und Konstanten, wie z. B. die universellen Naturkonstanten, sind mit ihrem Zahlenwert im Text wiedergegeben. Ein reichhaltiges Abbildungsmaterial ist bei so kurzgefaßten Darstellungen stets ein dringendes Erfordernis. Die sehr zahlreichen schematischen Skizzen des Verf. sind klar und schnell zu erfassen, sie werden ergänzt durch einige besonders instruktive Abbildungen ..."

„Berichte über die gesamte Physiologie u. experiment. Pharmakologie"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

FILED IN STACKS

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.
Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

Zuletzt erschienen:

MAY CIRCULATE

Band LXXI:

Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen
mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme

Von Dr. **Josef Meixner**, ord. Professor der Theoretischen Physik an der Techn. Hochschule Aachen, und Dr. **Friedrich Wilhelm Schäfke**, Dozent der Mathematik an der Universität Mainz. Mit 29 Abbildungen. XII, 414 Seiten Gr.-8°. 1954.
DM 49.—; Ganzleinen DM 52.60

Inhaltsübersicht: Einleitung. — I. Mathieusche Funktionen. Historisches. II. Sphäroidfunktionen. Historisches. III. Anwendungen der MATHIEU- und Sphäroidfunktionen. IV. Zur Darstellung. V. Beschränkungen. VI. Zur Bezeichnung. — **1. Grundlagen:** Die Separation der Schwingungsgleichung in elliptischen Koordinaten und ihren Grenzfällen. Aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Über Parameterabhängigkeit bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Über Eigenwertprobleme mit einem Parameter. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern I, II, III. Über dreigliedrige lineare Rekursionen. Eine Verallgemeinerung der HANKELschen asymptotischen Reihen. — **2. Mathieusche Funktionen.** Die Mathieusche Differentialgleichung. Allgemeines. Die Funktionen $\lambda_\nu(h^2)$ und $\mathrm{me}_\nu(z\,;h^2)$. Die Stabilitätskarte. Charakteristische Kurven. Die Funktionen $\mathrm{M}_\nu^{(j)}(z\,;h)$. Das Additionstheorem. Weitere Reihenentwicklungen und Integralrelationen. Die Funktionen ganzer Ordnung. Ergänzungen. — **3. Sphäroidfunktionen.** Die Sphäroiddifferentialgleichung. Allgemeines. Die Sphäroidfunktionen $\mathrm{ps}_n^m(z\,;\gamma^2)$. Über Zylinder- und Kugelfunktionen. Der charakteristische Exponent ν. Die Funktionen $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$ und $\tilde{\mathrm{Qs}}_\nu^\mu(z\,;\gamma^2)$ $[\nu \neq \frac{1}{2}(\mathrm{mod}\,1)]$. Die Funktionen Ps_ν^μ, Qs_ν^μ, ps_ν^μ, qs_ν^μ und $\mathrm{S}_\nu^{\mu\,(j)}$ $[\nu \neq \frac{1}{2}(\mathrm{mod}\,1)]$. Ein Additionstheorem. Weitere Reihenentwicklungen und Integralrelationen. Ergänzungen. — **4. Anwendungen der Mathieuschen Funktionen und der Sphäroidfunktionen.** Mechanische und elektrische Schwingungen mit periodisch veränderlichen Parametern. Systeme mit räumlich periodischer Struktur. Mechanische und akustische Eigenschwingungen. Elektromagnetische Eigenschwingungen. Abstrahlungsprobleme. Beugungsprobleme. Wellenmechanische Probleme. — Literaturverzeichnis. Verzeichnis der wichtigsten Funktionssymbole. — Namen- und Sachverzeichnis.

LXXII. Band:

Grundlagen der analytischen Topologie

Von **Georg Nöbeling**, o. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. X, 221 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 33.—; Ganzleinen DM 36.60

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Vorbereitungen:** Vereine und Verbände. Untervereine und Unterverbände. Homomorphismen und Isomorphismen. Raster, Filter und Ideale. Darstellungs- und Erweiterungssätze. Produktvereine und Produktverbände. — **II. Topologische Strukturen:** Grundbegriffe (Topologische Vereine. Topologische Boole-Verbände. Topologische Räume. Quasi-metrische und metrische Räume). Adhärenz und Häufung (Gefilterte Funktionen. Adhärente Somen, limes superior und limes inferior einer gefilterten Somenfamilie. Adhärente Somen eines Rasters. Konvergente Raster. Häufungssomen und Derivierte eines Somas). Topologie von Untervereinen. Stetige Homomorphismen. Homöomorphien. Trennungsaxiome (T_1-topologische Boole-Verbände. Separierte, reguläre, normale und vollständig normale topologische Boole-Verbände. Vollständig reguläre, topologische Boole-Verbände). m-Kompaktheit und Vollkompaktheit. Dichtigkeit. Zusammenhang. Ableitung nach einem Filter oder einem Ideal. Topologische Restklassenvereine. Topologische Produktverbände (Topologische Boolesche Produktverbände. Topologische Cartesische Produkträume). Darstellungs- und Erweiterungssätze (Darstellung topologischer Vereine als Untervereine topologischer Räume. Erweiterung von T_1-Räumen zu vollkompakten T_1-Räumen). — **III. Uniforme Strukturen:** Uniforme Boole-Verbände. Reell-uniforme Boole-Verbände. Uniforme Räume. Gleichmäßig stetige Homomorphismen. Uniforme Konvergenz. Uniforme Struktur und Trennungsaxiome. Uniformierbare Boole-Verbände. Vollständige uniforme Boole-Verbände. Darstellungs- und Erweiterungssätze. — Anhang. — Bibliographie. — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.